目 录

1. 范畴

1.1. **Grothendieck宇宙.** 粗略而言, 如果我们在一个集合U里可以进行所有的数学操作, 那么这个集合就称为一个Grothendieck宇宙.

定义1.1.1. 一个**Grothendieck宇宙**是一个集合U, 满足下列公理:
- (i) 如果$x \in U$且$y \in x$, 则$y \in U$.
- (ii) 如果$x \in U$, 则幂集$P(x) \in U$.
- (iii) 如果$I \in U$, $x : I \to U$是一个映射, 则集合的并$\bigcup_{\alpha \in I} x(\alpha) \in U$.

引理1.1.2. (1) 如果$x \in U$且$y \subset x$, 则$y \in U$.
(2) 如果$U \neq \emptyset$, 则$\emptyset \in U$.
(3) 如果$x, y \in U$, 则$x \cup y \in U$.
(4) 如果$x, y \in U$, 则$x \times y \in U$.

证明. (1) 因为$y \in P(x)$, 所以根据公理(i)和(ii)得$y \in U$.
(2) 是(1)的推论.
(3) 两元素集合$P(P(\emptyset)) \in U$.
(4) $x \times y \subset P(P(x \cup y))$. (有序对定义为$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.)

□

命题1.1.3. (1) 如果$I \in U$, $x : I \to U$是一个映射, 则$\bigcap_{\alpha \in I} x(\alpha) \in U$.
(2) 如果$I \in U$, $x : I \to U$是一个映射, 则$\coprod_{\alpha \in I} x(\alpha) \in U$.
(3) 如果$I \in U$, $x : I \to U$是一个映射, 则$\prod_{\alpha \in I} x(\alpha) \in U$.
(4) 如果$x, y \in U$, 则$y^x \in U$.

证明. (1) $\bigcap_{\alpha \in I} x(\alpha) \subset \bigcup_{\alpha \in I} x(\alpha)$.
(2) $\coprod_{\alpha \in I} x(\alpha) \subset I \times \bigcup_{\alpha \in I} x(\alpha)$.
(3) $\prod_{\alpha \in I} x(\alpha) \subset P(I \times \bigcup_{\alpha \in I} x(\alpha))$.
(4) $y^x \subset P(x \times y)$.

□

习题1.1.4. 证明: 若U是一个Grothendieck宇宙, 则$U \notin U$.

例1.1.5. (1) 空集$\emptyset$是一个Grothendieck宇宙.
(2) 所有遗传有限集(hereditarily finite sets)组成的集合$V_\omega = P(\emptyset) \cup P^2(\emptyset) \cup \cdots$是一个Grothendieck宇宙.

接下来我们选定一个Grothendieck宇宙U使得自然数集$\mathbb{N} \in U$. 如果一个集合X含于U, 则称X是**小的**, 否则称X是**大的**.

如不做特别说明, 我们提到的拓扑空间, 以及群、环、模、线性空间等代数概念都将假设是小的.

1.2. **范畴的定义.**

定义1.2.1. 一个**范畴**$\mathcal{C}$由下列要素组成
(1) 一个集合$Ob(\mathcal{C})$, 其中的元素称为$\mathcal{C}$的**对象**. 我们用记号$X \in \mathcal{C}$表示X是范畴$\mathcal{C}$的一个对象.
(2) 每两个对象$X, Y \in \mathcal{C}$有一个集合$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, 其中的元素称为从$X$到$Y$的**态射**. 我们用记号$f : X \to Y$表示$f$是一个从$X$到$Y$的态射.
(3) 每三个对象$X, Y, Z \in \mathcal{C}$有一个映射$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$, 称为**复合规则**.

它们满足下列公理
- (单位律) 每个对象$X \in \mathcal{C}$有一个态射$\mathrm{Id}_X : X \to X$, 称为**恒同态射**, 使得对任意态射$f : Y \to X$有$\mathrm{Id}_X \circ f = f$, 对任意态射$g : X \to Z$有$g \circ \mathrm{Id}_X = g$.
- (结合律) 对任意态射$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$, 有$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

注1.2.2. 恒同态射Id_X是唯一的.

例1.2.3. (1) 小集合及集合映射组成的集合范畴$\mathcal{S}et$.
(2) 拓扑空间范畴$\mathcal{T}op$, 流形范畴.
(3) 群范畴$\mathcal{G}rp$, Abel群范畴$\mathcal{A}bel$, 一个域k上的线性空间范畴$\mathcal{V}ect_k$, 一个环A的左模范畴LMod_A.
(4) (含单位元的)环范畴$\mathcal{R}ing$, 交换环范畴$\mathcal{CR}ing$.
(5) 带基点的拓扑空间范畴$\mathcal{T}op_*$, 同伦范畴$\mathcal{T}op^{hom}$.
(6) 偏序集$(X, \leq)$.
(7) **反向范畴**$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$: $Ob(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = Ob(\mathcal{C})$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$.
(8) **乘积范畴**$\mathcal{C}\times\mathcal{D}$: $Ob(\mathcal{C}\times\mathcal{D}) = Ob(\mathcal{C})\times Ob(\mathcal{D})$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((X,Y),(X',Y')) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X')\times \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y,Y')$.

定义1.2.4. 设$\mathcal{C}$是一个范畴. $\mathcal{C}$中的一个态射$f: X \to Y$称为**同构**, 若存在$g: Y \to X$, 使得$g\circ f = \mathrm{Id}_X$, $f\circ g = \mathrm{Id}_Y$. 此时称X与Y**同构**, 记作$X\cong Y$. 如果$\mathcal{C}$中的态射都是同构, 则称$\mathcal{C}$是一个**群胚**.

$\mathcal{C}$中的一个态射$f: X \to Y$称为**单射**, 若对任意$Z\in\mathcal{C}$, 与f复合诱导单射$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,Y)$. 此时称$X$是$Y$的一个**子对象**

$\mathcal{C}$中的一个态射$f: X \to Y$称为**满射**, 若对任意$Z\in\mathcal{C}$, 与f复合诱导单射$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$. 此时称$Y$是$X$的一个**商对象**

注1.2.5. 若$f: X\to Y$是同构, 则f既单且满. 反之不一定. 比如在一个偏序集中, 所有态射既单且满, 但只有恒同态射是同构.

定义1.2.6. 一个范畴$\mathcal{C}$的一部分对象和态射, 如果在态射复合下封闭, 则构成一个范畴, 称为$\mathcal{C}$的一个**子范畴**. $\mathcal{C}$的一个子范畴$\mathcal{D}$称为**完全的**, 如果对任意$X,Y\in\mathcal{D}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

例1.2.7. (1) $\mathcal{A}bel$是$\mathcal{G}rp$的完全子范畴. $\mathcal{CR}ing$是$\mathcal{R}ing$的完全子范畴.
(2) 有限维线性空间组成$\mathcal{V}ect_k$的一个完全子范畴$\mathcal{V}ect_k^{fin}$.
(3) 全体小集合和集合单射组成$\mathcal{S}et$的一个子范畴.

范畴	始对象/ 终对象	乘积	余乘积	同构	单/满射
$\mathcal{S}et$	$\emptyset$ / 单元素集	Descartes积	无交并	双射	单/满射
$\mathcal{T}op$	$\emptyset$ / pt	乘积空间	无交并	同胚	连续单/满射
$\mathcal{T}op_*$	$(\mathrm{pt},\mathrm{pt})$	乘积空间	一点并	同胚	连续单/满射
$\mathcal{G}rp$	平凡群	群直积	自由乘积	群同构	单/满同态
$\mathcal{A}bel$	0	群直积	直和	群同构	单/满同态
$\mathcal{R}ing$	$\mathbb{Z}$ / 0	环直积	自由乘积	环同构	单同态/-
$\mathcal{CR}ing$	$\mathbb{Z}$ / 0	环直积	张量积	环同构	单同态/-
偏序集	最小元/ 最大元	下确界	上确界	恒同	全部态射

注1.2.8. 一个范畴可以看作一个有向图, 其中的顶点是对象, 箭头是态射. 图上附带一个箭头的复合运算, 运算满足单位律和结合律.

我们考虑集合范畴$\mathcal{S}et$所对应的有向图. 忘掉所有集合的信息, 仅从这个图我们可以还原出范畴$\mathcal{S}et$几乎所有的信息: 图里的一个顶点来自于空集, 当且仅当它到每个顶点有且只有一个箭头. 图里的一个顶点来自于单元素集, 当且仅当每个顶点到它有且只有一个箭头. 一个顶点所对应的集合的元素与单元素集到它的箭头一一对应.

这个例子告诉我们, 范畴里一个对象的信息都含在它与其它对象的态射中. 稍后的Yoneda引理会更好地阐释这一点.

1.3. 函子与自然变换.

定义1.3.1. 设$\mathcal{C},\mathcal{D}$是两个范畴. 一个**函子**$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$包括下列对应

(1) 每个$\mathcal{C}$中的对象$X\in\mathcal{C}$, 对应$\mathcal{D}$中的一个对象$F(X)\in\mathcal{D}$.
(2) 每个$\mathcal{C}$中的态射$f: X\to Y$, 对应$\mathcal{D}$中的一个态射$F(f): F(X)\to F(Y)$.

它们满足下列公理

- (单位律) 对$\mathcal{C}$中的每个对象$X \in \mathcal{C}$, $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$.
- (复合律) 对$\mathcal{C}$中的任意态射$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, 有$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

习题1.3.2. 设$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$是一个函子. 证明: F将同构映为同构.

定义1.3.3. 一个函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$称为**忠实的**(**完全的**, **完全忠实的**), 如果对任意$X, Y \in \mathcal{C}$, F诱导的映射$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$是单射(满射,双射).

定义1.3.4. 设$\mathcal{C}, \mathcal{D}$是两个范畴, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$是两个函子. 一个函子的**自然变换**$\xi : F \to G$是一系列自然的态射$\xi_X : F(X) \to G(X)$, $X \in \mathcal{C}$. 具体而言, ξ对$\mathcal{C}$中的每个对象$X \in \mathcal{C}$, 指定$\mathcal{D}$中的一个态射$\xi_X : F(X) \to G(X)$, 使得对任一$\mathcal{C}$中的态射$f : X \to Y$, 下列图表交换

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\xi_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\xi_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y). \end{tikzcd}$$

一个函子**同构**$\xi : F \to G$是一系列自然的同构$\xi_X : F(X) \to G(X)$, $X \in \mathcal{C}$. 具体而言, ξ是一个自然变换, 且对所有的$X \in \mathcal{C}$, ξ_X都是同构. 此时称函子F与G**同构**, 记作$F \cong G$.

习题1.3.5. 证明: 一个自然变换$\xi : F \to G$是函子同构, 当且仅当存在自然变换$\eta : G \to F$使得$\eta \circ \xi = \mathrm{Id}_F$, $\xi \circ \eta = \mathrm{Id}_G$.

定义1.3.6. 一个函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$称为**范畴等价**, 若存在函子$G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, 使得$G \circ F \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$, $F \circ G \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$. 此时称范畴$\mathcal{C}$与$\mathcal{D}$**等价**, 记作$\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$.

例1.3.7. (1) 恒同函子$\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. 恒同自然变换$\mathrm{Id}_F : F \to F$.

(2) 遗忘函子$\mathcal{T}op \to \mathcal{S}et$, $\mathcal{G}rp \to \mathcal{S}et$, $\mathcal{R}ing \to \mathcal{A}bel$, $\mathcal{T}op_* \to \mathcal{T}op$. 它们都是忠实的, 但不是完全的.

(3) 子范畴的含入函子是忠实的, 完全子范畴的含入函子是完全忠实的.

(4) 同调群函子$H_n : \mathcal{T}op \to \mathcal{A}bel$. 基本群函子$\pi_1 : \mathcal{T}op_* \to \mathcal{G}rp$, 同伦群函子$\pi_n : \mathcal{T}op_* \to \mathcal{A}bel$, $n \geq 2$, 和道路分支函子$\pi_0 : \mathcal{T}op \to \mathcal{S}et$. 它们既不是忠实的, 也不是完全的.

(5) 函数环函子$\mathcal{T}op \to \mathcal{CR}ing^{\mathrm{op}}$, $X \mapsto C(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(X, \mathbb{R})$.

(6) 对偶空间函子$D : \mathcal{V}ect_k \to \mathcal{V}ect_k^{\mathrm{op}}$, 它是忠实的但不是完全的. 自然变换$\mathrm{Id} \to D^2$. 范畴等价$D : \mathcal{V}ect_k^{fin} \to (\mathcal{V}ect_k^{fin})^{\mathrm{op}}$.

(7) 函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$诱导一个函子$F^{\mathrm{op}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$.

定义1.3.8. 设$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$是一个函子. 我们称$X \in \mathcal{D}$属于$F$的**本质像**, 如果存在$Y \in \mathcal{C}$, 使得$X \cong F(Y)$. 我们称$F$是**本质满的**, 如果$\mathcal{D}$中的对象都属于$F$的本质像.

注1.3.9. 若两个函子同构, 则它们有相同的本质像.

命题1.3.10. 一个函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$是范畴等价的充分必要条件是: (1) F是完全忠实的, (2) F是本质满的.

证明. 充分性. 对于$X \in \mathcal{D}$, 根据(2)我们可选取$G(X) \in \mathcal{C}$及同构$\xi_X : F(G(X)) \to X$. 对于$\mathcal{D}$中态射$f : X \to Y$, 根据(1)存在唯一态射$G(f) : G(X) \to G(Y)$使得$F(G(f)) = \xi_Y^{-1} \circ f \circ \xi_X$. 于是我们得到一个函子$G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, 并且有函子同构$\xi : F \circ G \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$. 另一方面, 对于$Z \in \mathcal{C}$, 根据(1)同构$\xi_{F(Z)} : FGF(Z) \to F(Z)$决定了一个同构$\eta_Z : GF(Z) \to Z$. 因此有函子同构$\eta : G \circ F \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$.

必要性. 设$G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$是$F$的逆. (1) 对于$X, Y \in \mathcal{C}$, 映射$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$有逆映射$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)) \xrightarrow{G} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GF(X), GF(Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. (2) 对于$X \in \mathcal{D}$, 函子同构$F \circ G \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$给出一个同构$F(G(X)) \cong X$. $\square$

推论1.3.11. 设$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$是一个完全忠实的函子, $\mathcal{D}'$是由F的本质像组成的$\mathcal{D}$的完全子范畴. 则F诱导了范畴等价$\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}'$.

习题1.3.12. 设$X \in \mathcal{S}et$是一个单元素集. 证明: 函子$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(X,-): \mathcal{S}et \to \mathcal{S}et$是一个范畴等价.

习题1.3.13. 证明: 由全体拓扑空间及全体映射组成的范畴与$\mathcal{S}et$等价.

1.4. **Yoneda引理.**

定义1.4.1. 一个范畴$\mathcal{C}$称为**局部小的**, 如果任意两个对象间的态射集合$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$是小的. 一个范畴$\mathcal{C}$称为**小的**, 如果$\mathcal{C}$是局部小的, 并且$Ob(\mathcal{C})$是一个小集合. 一个范畴$\mathcal{C}$称为**本质小的**, 如果$\mathcal{C}$等价于一个小范畴.

例1.4.2. $\mathcal{S}et$的有限集组成的完全子范畴是本质小的, 但不是小的.

定义1.4.3. 设$\mathcal{C},\mathcal{D}$是范畴. 全体函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$及自然变换构成一个范畴, 记作$\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$. 特别地, 范畴$\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathcal{S}et)$称为$\mathcal{C}$上的**预层范畴**, 记作$\mathcal{P}(\mathcal{C})$, 其中的对象称为$\mathcal{C}$上的**预层**. 对于局部小范畴$\mathcal{C}$, 我们将函子$j:\mathcal{C}\to\mathcal{P}(\mathcal{C})$, $X\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)$称为**Yoneda嵌入**.

注1.4.4. 如果$\mathcal{C}$是小范畴且$\mathcal{D}$是(局部)小范畴, 则$\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$也是(局部)小范畴.

注1.4.5. 当$\mathcal{C}$不是一个(局部)小范畴, 我们可以通过放大宇宙使得$\mathcal{C}$成为一个(局部)小范畴. 因此我们对于(局部)小范畴的结论, 通常都可用于一般的范畴.

命题1.4.6. 设$\mathcal{C}$是一个局部小范畴, $X\in\mathcal{C}$, $\mathcal{F}\in\mathcal{P}(\mathcal{C})$. 我们有双射$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}(\mathcal{C})}(j(X),\mathcal{F})\to\mathcal{F}(X)$, $\xi\mapsto\xi_X(\mathrm{Id}_X)$.

证明. 对于$x\in\mathcal{F}(X)$, 我们有自然变换$\xi_x: j(X)\to\mathcal{F}$, 使得$(\xi_x)_Z=\mathcal{F}(-)(x):\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X)\to\mathcal{F}(Z)$. 映射$x\mapsto\xi_x$与$\xi\mapsto\xi_X(\mathrm{Id}_X)$互逆. □

推论1.4.7 (Yoneda引理)**.** 设$\mathcal{C}$是一个局部小范畴. 则Yoneda嵌入$j:\mathcal{C}\to\mathcal{P}(\mathcal{C})$是完全忠实的.

定义1.4.8. 设$\mathcal{C}$是一个局部小范畴. 称一个函子$F:\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{S}et$是**可表示的**, 如果$F$同构于某个函子$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)$; 换言之, F属于Yoneda嵌入的本质像.

注1.4.9. 根据Yoneda引理, 表示一个函子$F:\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{S}et$的对象$X$在典范同构下唯一.

例1.4.10. 遗忘函子$For:(\mathcal{T}op^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}\to\mathcal{S}et$由单元素集表示.

习题1.4.11. 证明遗忘函子$For:\mathcal{G}rp\to\mathcal{S}et$, $For:\mathcal{R}ing\to\mathcal{S}et$是可表示的.

习题1.4.12. 证明函子$\mathcal{G}rp\to\mathcal{S}et$, $G\mapsto\{g\in G\mid g^2=1\}$是可表示的.

1.5. **伴随函子.**

定义1.5.1. 一个**伴随**由一对函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$, $G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$和一个自然的双射$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),Y)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y))$组成. 此时称$F$是$G$的**左伴随函子**, G是F的**右伴随函子**.

例1.5.2. (1) 遗忘函子$\mathcal{T}op,\mathcal{G}rp,\mathcal{A}bel,\mathcal{R}ing,\mathcal{CR}ing\to\mathcal{S}et$有左伴随函子, 将一个集合$S$映为由$S$生成的离散空间, 自由群, 自由Abel群, $\mathbb{Z}$上的自由代数, $\mathbb{Z}$上的多项式环.

(2) 设$\phi:A\to B$是环同态. 函子$\phi_*:\mathrm{LMod}_B\to\mathrm{LMod}_A$, $N\mapsto {}_AN$有左伴随函子$\phi^*=B\otimes_A-:\mathrm{LMod}_A\to\mathrm{LMod}_B$, 和右伴随函子$\phi^!=\mathrm{Hom}_A(B,-):\mathrm{LMod}_A\to\mathrm{LMod}_B$.

(3) 设A是一个交换环, N是一个A模. 由张量积的定义, $-\otimes_A N:\mathrm{LMod}_A\to\mathrm{LMod}_A$是$\mathrm{Hom}_A(N,-):\mathrm{LMod}_A\to\mathrm{LMod}_A$的左伴随函子.

注1.5.3. 若函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$是$G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$的左伴随, 则$F^{\mathrm{op}}:\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$是$G^{\mathrm{op}}:\mathcal{D}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$的右伴随.

习题1.5.4. 设函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$, $F':\mathcal{D}\to\mathcal{E}$分别是$G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$, $G':\mathcal{E}\to\mathcal{D}$的左伴随. 证明: $F'\circ F$是$G\circ G'$的左伴随.

命题1.5.5. 设$\mathcal{C},\mathcal{D}$是局部小范畴. 一个函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$有右伴随的充分必要条件是, 对每个$Y\in\mathcal{D}$, 函子$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-),Y):\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{S}et$是可表示的.

证明. 必要性. 设$G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$是$F$右伴随. 由伴随函子的定义, $G(Y)$表示函子$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-),Y)$.

充分性. 设函子$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-),Y)$由$G(Y)$表示. 对于$\mathcal{D}$中一个态射$f:Y\to Y'$, 根据Yoneda引理, 自然变换$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,G(Y))\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-),Y)\xrightarrow{f\circ-}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-),Y')\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,G(Y'))$给出一个态射$G(f):G(Y)\to G(Y')$. 这样我们得到一个函子$G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$, 它是$F$的右伴随. □

推论1.5.6 (伴随函子的唯一性)**.** 若一个函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$有右伴随, 则右伴随函子在典范同构下唯一.

定理1.5.7. 函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$是$G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$的左伴随的充分必要条件是, 存在自然变换$u:\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}\to G\circ F$和$v:F\circ G\to\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, 使得下列两个复合自然变换都是恒同

$$F=F\circ\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}\xrightarrow{\mathrm{Id}_F\circ u}F\circ G\circ F\xrightarrow{v\circ\mathrm{Id}_F}\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}\circ F=F,$$

$$G=\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}\circ G\xrightarrow{u\circ\mathrm{Id}_G}G\circ F\circ G\xrightarrow{\mathrm{Id}_G\circ v}G\circ\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}=G.$$

证明. 充分性. 我们有两个映射

$$\Phi:\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),Y)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y)),\quad f\mapsto(X\xrightarrow{u_X}GF(X)\xrightarrow{G(f)}G(Y)),$$

$$\Psi:\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y))\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),Y),\quad g\mapsto(F(X)\xrightarrow{F(g)}FG(Y)\xrightarrow{v_Y}Y).$$

有$\Psi\Phi(f)=(F(X)\xrightarrow{F(u_X)}FGF(X)\xrightarrow{FG(f)}FG(Y)\xrightarrow{v_Y}Y)$. 由$v$的自然性, $\Psi\Phi(f)=(F(X)\xrightarrow{F(u_X)}FGF(X)\xrightarrow{v_{F(x)}}F(X)\xrightarrow{f}Y)=f$. 同理可证$\Phi\Psi(g)=g$.

必要性. 令$u_X:X\to GF(X)$是$\mathrm{Id}_{F(X)}$在自然同构$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(X))\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,GF(X))$下的像, $v_Y:FG(Y)\to Y$是$\mathrm{Id}_{G(X)}$在自然同构$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G(Y),G(Y))\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FG(Y),Y)$下的像. 从而得到自然变换$u$, v. 由交换图表

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GF(X),GF(X)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "-\circ u_X"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FGF(X),F(X)) \arrow[d, "-\circ F(u_X)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,GF(X)) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(X))
\end{tikzcd}$$

可知第一个复合自然变换是恒同. 同理可证第二个. □

习题1.5.8. 设函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$有右伴随函子$G$. 证明: G是完全忠实的, 当且仅当$v:F\circ G\to\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$是同构.

习题1.5.9. 设$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$是$G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$的左伴随函子, $\mathcal{E}$是一个范畴. 证明: $F\circ-:\mathrm{Fun}(\mathcal{E},\mathcal{C})\to\mathrm{Fun}(\mathcal{E},\mathcal{D})$是$G\circ-:\mathrm{Fun}(\mathcal{E},\mathcal{D})\to\mathrm{Fun}(\mathcal{E},\mathcal{C})$的左伴随函子.

1.6. **局部化.**

定义1.6.1. 设$\mathcal{C}$是一个范畴, S是$\mathcal{C}$中的一类态射. $\mathcal{C}$沿S的**局部化**是一个范畴$S^{-1}\mathcal{C}$及一个函子$L:\mathcal{C}\to S^{-1}\mathcal{C}$, 使得$L$将$S$中的态射映为同构, 并且对任意范畴$\mathcal{D}$有范畴等价

$$-\circ L:\mathrm{Fun}(S^{-1}\mathcal{C},\mathcal{D})\to\mathrm{Fun}_S(\mathcal{C},\mathcal{D}),$$

其中$\mathrm{Fun}_S(\mathcal{C},\mathcal{D})\subset\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$是完全子范畴, 由将$S$中的态射映为同构的函子组成. 我们将这样得到的函子L称为一个**局部化函子**.

注1.6.2. 根据定义, 范畴$S^{-1}\mathcal{C}$如果存在则在典范等价下唯一.

例1.6.3. 设A是一个交换环, 看作只有一个对象的范畴, $S\subset A$是一个乘法封闭子集. 则$S^{-1}A$就是通常的环的局部化.

习题1.6.4. 证明: 若函子$L:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$有一个完全忠实的右伴随函子$\iota$, 则$L$是局部化函子. [提示: 利用习题1.5.8, 并考虑自然变换$u:\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}\to\iota\circ L$.]

2. 极限

2.1. 极限的定义.

定义2.1.1. 设$\mathcal{C}$是一个范畴. 称一个对象$X \in \mathcal{C}$是一个**始对象**, 如果X到每个对象$Y \in \mathcal{C}$都有唯一一个态射; 换言之, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$是单元素集. $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$中的始对象称为$\mathcal{C}$中的**终对象**. 如果$X$既是始对象又是终对象, 则称$X$是一个**零对象**.

设$\mathcal{C}$是一个有零对象的范畴. 一个态射$f: X \to Y$称为**零态射**, 若f穿过零对象.

始对象通常记作$\emptyset$, 终对象通常记作$*$, 零对象和零态射通常记作0.

习题2.1.2. 设$\mathcal{C}$是一个有零对象的范畴. 证明: 对任意$X, Y \in \mathcal{C}$, 存在唯一一个零态射$0: X \to Y$.

注2.1.3. 一个范畴中的始对象(终对象, 零对象)如果存在则在典范同构下唯一.

定义2.1.4. 设$\mathcal{C}$是一个范畴. $\mathcal{C}$中的一个**图表**是一个函子$p: \mathcal{I} \to \mathcal{C}$, 其中$\mathcal{I}$是一个范畴, 称为**指标范畴**.

图表p的**极限**是一个对象X, 及一组态射$\{f_\alpha : X \to p(\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$, 使得对任意$\mathcal{I}$中的态射$t: \alpha \to \beta$有$f_\beta = p(t) \circ f_\alpha$; 它们满足下列泛性质: 对任满足同样条件的对象$Y \in \mathcal{C}$及态射$\{g_\alpha : Y \to p(\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$, 存在唯一态射$h: Y \to X$, 使得$g_\alpha = f_\alpha \circ h$. 通常我们也将$X$称为图表$p$的极限, 记作$\varprojlim p$或$\varprojlim_{\alpha\in\mathcal{I}} p(\alpha)$.

图表$p^{\mathrm{op}}: \mathcal{I}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$的极限称为图表$p$的**余极限**, 记作$\varinjlim p$或$\varinjlim_{\alpha\in\mathcal{I}} p(\alpha)$.

注2.1.5. 一个图表的(余)极限如果存在, 则在典范同构下唯一.

例2.1.6. (1) 以空集$\emptyset$为指标的极限和余极限分别是终对象和始对象.

(2) 以集合Λ为指标的极限和余极限分别称为**乘积**和**余乘积**, 记作$\prod_{\alpha\in\Lambda} p(\alpha)$和$\coprod_{\alpha\in\Lambda} p(\alpha)$.

(3) 一个偏序集Λ称为一个**反向集(正向集)**, 若Λ的任意有限子集有下界(上界); 特别地, Λ非空. 以反向集(正向集)Λ为指标的极限(余极限), 称为**反向极限(正向极限)**.

(4) 设$\Lambda = \{x, y, z\}$是一个偏序集, 关系为$x \le z$, $y \le z$. 以Λ (Λ^{op})为指标的极限(余极限), 称为**拉回(推出)**, 记作$p(x) \times_{p(z)} p(y)$ ($p(x) \coprod_{p(z)} p(y)$), 或者示以图表

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim p & \longrightarrow & p(x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ p(y) & \longrightarrow & p(z) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} p(z) & \longrightarrow & p(x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ p(y) & \longrightarrow & \varinjlim p \end{array}$$

(5) 设$\mathcal{I}$是由两个对象x, y组成的范畴, 仅有的非恒同态射是两个态射$f, g: x \to y$. 以$\mathcal{I}$为指标的极限和余极限, 分别称为**equalizer**和**coequalizer**, 示以图表

$$\varprojlim p \to p(x) \rightrightarrows p(y), \qquad p(x) \rightrightarrows p(y) \to \varinjlim p.$$

例2.1.7. 在范畴$\mathcal{S}et, \mathcal{T}op, \mathcal{G}rp, \mathcal{A}bel, \mathcal{R}ing, \mathcal{CR}ing$中, 有如下极限和余极限.

(1) 一个小图表p的极限$\varprojlim p = \{(x_\alpha) \in \prod p(\alpha) \mid p(t)(x_\alpha) = x_\beta,\ \forall t: \alpha \to \beta\}$.

(2) 拉回$X \times_Z Y = \{(x,y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$, 其中$f: X \to Z$, $g: Y \to Z$是图表中的态射.

(3) 两个态射$f, g: X \to Y$的equalizer为$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$.

(4) 一个小正向图表p的正向极限$\varinjlim p$是全体$p(\alpha)$的无交并商掉如下等价关系: $x_\alpha \sim x_\beta$若存在$t: \alpha \to \gamma$, $s: \beta \to \gamma$, 使得$p(t)(x_\alpha) = p(s)(x_\beta)$.

(5) 两个态射$f, g: X \to Y$的coequalizer分别为Y商掉由$\{f(x) \sim g(x)\}_{x\in X}$生成的等价关系, 等价关系, 正规子群, 子群, 双边理想, 理想.

例2.1.8. 设X是一个光滑流形. 对于X的一组开集$\{U_i\}$, 有光滑流形范畴中的coequalizer图表

$$\coprod_{i,j} U_i \cap U_j \rightrightarrows \coprod_i U_i \to \bigcup_i U_i,$$

和$\mathcal{CR}ing$中的equalizer图表

$$C^\infty(\bigcup_i U_i) \to \prod_i C^\infty(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} C^\infty(U_i \cap U_j).$$

对于一点$x \in X$, 全体包含x的开集在包含关系"$\supset$"下构成一个正向集Λ. $\mathcal{CR}ing$中的正向极限$\varinjlim_{U \in \Lambda} C^\infty(U) = C^\infty_x(X)$.

例2.1.9. 设A是一个环, M是一个右A模, N是一个左A模. 则有$\mathcal{A}bel$中coequalizer图表

$$M \otimes A \otimes N \rightrightarrows M \otimes N \to M \otimes_A N.$$

习题2.1.10. 证明: 若$X \xrightarrow{f} Y \rightrightarrows Z$是equalizer图表, 则$f$是单射; 若$Y \rightrightarrows Z \xrightarrow{f} X$是coequalizer图表, 则$f$是满射.

习题2.1.11. 设范畴$\mathcal{I}$有始对象$\emptyset$. 证明: 一个图表$p : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$的极限就是$p(\emptyset)$.

习题2.1.12. 设$\mathcal{D}$是$\mathcal{C}$的完全子范畴, p是$\mathcal{D}$中的一个图表. 证明: 若p在$\mathcal{C}$中的极限存在, 且落在$\mathcal{D}$中, 则它是p在$\mathcal{D}$中的极限.

习题2.1.13. 证明$\mathcal{S}et$与$\mathcal{S}et^{\mathrm{op}}$不等价. [提示: 范畴等价保持所有极限和余极限.]

构造2.1.14. 设$\mathcal{C}$是一个范畴. 我们向$\mathcal{C}$中添加一个始对象∞, 得到一个范畴$\mathcal{C}^{\triangleleft}$, 称为$\mathcal{C}$的**左锥**. 具体而言, $Ob(\mathcal{C}^{\triangleleft}) = Ob(\mathcal{C}) \cup \{\infty\}$, $\mathcal{C}$是$\mathcal{C}^{\triangleleft}$的完全子范畴, 且$\infty$到$\mathcal{C}^{\triangleleft}$的每个对象都有唯一一个态射, 而$\mathcal{C}$的对象到$\infty$没有态射.

我们将$((\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\triangleleft})^{\mathrm{op}}$记作$\mathcal{C}^{\triangleright}$, 称为$\mathcal{C}$的**右锥**. 它是向$\mathcal{C}$中添加一个终对象$\infty$得到的.

注2.1.15. 根据定义, 一个图表$p : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$的极限, 实际上是一个$p$的扩张$\bar{p} : \mathcal{I}^{\triangleleft} \to \mathcal{C}$, 使得对每个$p$的扩张$\bar{p}' : \mathcal{I}^{\triangleleft} \to \mathcal{C}$, $\mathrm{Id}_p : p \to p$可唯一地扩张为一个自然变换$\bar{p} \to \bar{p}'$.

习题2.1.16. 设$\mathcal{I}$是一个范畴, 范畴$\mathcal{C}$有所有以$\mathcal{I}$为指标的极限. 则遗忘函子$For : \mathrm{Fun}(\mathcal{I}^{\triangleleft}, \mathcal{C}) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$是极限函子$\varprojlim : \mathrm{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C}) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{I}^{\triangleleft}, \mathcal{C})$的左伴随.

构造2.1.17. 设$\mathcal{C}$是一个范畴, $X \in \mathcal{C}$是一个对象. 我们如下定义一个范畴$\mathcal{C}_{X/}$, 称为X**下的范畴**. 其中的一个对象是$\mathcal{C}$中的一个态射$h : X \to Y$, 其中的一个态射$f : h \to h'$是$\mathcal{C}$中的一个交换图表

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "h'"] & \\ Y \arrow[rr, "f"] & & Y'. \end{tikzcd}$$

我们将$((\mathcal{C}^{\mathrm{op}})_{X/})^{\mathrm{op}}$记作$\mathcal{C}_{/X}$, 称为$X$**上的范畴**.

例2.1.18. (1) 设k是一个域. 则$\mathcal{CR}ing_{k/}$是k交换代数范畴.

(2) $\mathcal{T}op_{\mathrm{pt}\,/} \simeq \mathcal{T}op_*$.

(3) 若$\mathcal{C}$有始对象$\emptyset$, 则$\mathcal{C}_{\emptyset/} \simeq \mathcal{C}$. 若$\mathcal{C}$有终对象$*$, 则$\mathcal{C}_{/*} \simeq \mathcal{C}$.

习题2.1.19. 证明: (1) 若$\mathcal{C}$有所有小极限, 则$\mathcal{C}_{X/}$也有所有小极限, 并且遗忘函子$For : \mathcal{C}_{X/} \to \mathcal{C}$保持所有小极限. (2) $\mathrm{Id}_X : X \to X$是$\mathcal{C}_{X/}$的始对象. (3) 若$\mathcal{C}$有所有小余极限, 则$\mathcal{C}_{X/}$也有所有小余极限, 并且遗忘函子$For : \mathcal{C}_{X/} \to \mathcal{C}$保持小正向极限.

习题2.1.20. 设范畴$\mathcal{C}$有拉回, $f : X \to Y$是$\mathcal{C}$中一个态射. 证明: 函子$f_* = f \circ - : \mathcal{C}_{/X} \to \mathcal{C}_{/Y}$, 是拉回函子$f^* = X \times_Y - : \mathcal{C}_{/Y} \to \mathcal{C}_{/X}$的左伴随.

习题2.1.21. 设$\mathcal{C}$是一个有有限乘积的范畴. $\mathcal{C}$中的一个**群对象**是一个函子$p : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{G}rp$, 使得$p$与遗忘函子$\mathcal{G}rp \to \mathcal{S}et$的复合是一个可表示函子. 证明下列事实:

(1) 一个群对象等价于一个对象$X \in \mathcal{C}$, 及态射$m : X \times X \to X$, $u : * \to X$, $s : X \to X$, 使得

- $m \circ (m \times \mathrm{Id}) = m \circ (\mathrm{Id} \times m) : X \times X \times X \to X$,

- $m\circ(u\times\mathrm{Id})=m\circ(\mathrm{Id}\times u)=\mathrm{Id}:X\to X$,
- $m\circ(s\times\mathrm{Id})\circ\Delta=m\circ(\mathrm{Id}\times s)\circ\Delta=u\circ *:X\to X$,

其中$\Delta:X\to X\times X$是对角态射, $*\in\mathcal{C}$是终对象, $*:X\to *$是典范态射.

(2) $\mathcal{S}et$中的群对象等价于群, $\mathcal{T}op$中的群对象等价于拓扑群, 流形范畴中的群对象等价于李群.

(3) $\mathcal{G}rp$和$\mathcal{A}bel$中的群对象等价于Abel群.

2.2. 极限的转化.

定义2.2.1. 一个范畴$\mathcal{I}$称为**有限的**, 若$\mathcal{I}$有有限个对象, 且$\mathcal{I}$的态射由有限个态射在复合下生成. 以有限范畴为指标的极限称为**有限极限**.

注2.2.2. 设$\mathcal{I},\mathcal{J}$是范畴, $\phi:\mathcal{J}\to\mathcal{I}$是一个函子, $p:\mathcal{I}\to\mathcal{C}$是一个图表. 则有典范态射$\varprojlim p\to\varprojlim(p\circ\phi)$. 特别地, 若$\mathcal{I}'$是$\mathcal{I}$的子范畴, 则有典范态射$\varprojlim p\to\varprojlim p|_{\mathcal{I}'}$. 此时我们称$p|_{\mathcal{I}'}:\mathcal{I}'\to\mathcal{C}$是$p$的一个**子图表**.

定理2.2.3. 设$\mathcal{C}$是一个范畴. 下列陈述等价:

(1) $\mathcal{C}$有所有小极限.
(2) $\mathcal{C}$有有限极限和小反向极限.
(3) $\mathcal{C}$有小乘积和拉回.
(4) $\mathcal{C}$有小乘积和equalizer.

设范畴$\mathcal{C}$有所有小极限, $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$是一个函子. 下列陈述等价:

(1) F保持所有小极限.
(2) F保持有限极限和小反向极限.
(3) F保持小乘积和拉回.
(4) F保持小乘积和equalizer.

证明. (1) $\Rightarrow$ (2)(3), 显然. (2) $\Rightarrow$ (1), 一个图表p的全体有限子图表在包含关系"$\supset$"下构成一个反向集. p的极限可表为这些子图表的极限的反向极限. (3) $\Rightarrow$ (4), 图表$X\rightrightarrows Y$的equalizer可表为拉回$X\times_{X\times Y}X$. (4) $\Rightarrow$ (1), 任一极限可由乘积和equalizer表出. 事实上, 极限$\varprojlim_{\alpha\in\mathcal{I}}p(\alpha)$可表为图表$\prod_{\alpha\in\mathcal{I}}p(\alpha)\rightrightarrows\prod_{t:\alpha\to\beta}p(\beta)$的equalizer, 其中两个态射分别为对角线态射和$\prod_{t:\alpha\to\beta}p(t)$. □

定理2.2.4. 设$\mathcal{C}$是一个范畴, 下列陈述等价:

(1) $\mathcal{C}$有所有有限极限.
(2) $\mathcal{C}$有终对象和拉回.
(3) $\mathcal{C}$有有限乘积和equalizer.

设范畴$\mathcal{C}$有有限极限, $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$是一个函子. 下列陈述等价:

(1) F保持所有有限极限.
(2) F保持终对象和拉回.
(3) F保持有限乘积和equalizer.

例2.2.5. 范畴$\mathcal{S}et,\mathcal{T}op,\mathcal{G}rp,\mathcal{A}bel,\mathcal{R}ing,\mathcal{CR}ing$有所有小极限和小余极限, 因为它们有小乘积, equalizer, 小余乘积, coequalizer.

例2.2.6. 设$\mathcal{C}$是一个范畴. 若范畴$\mathcal{D}$有所有小(余)极限, 则范畴$\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$亦然. 事实上, 对于一个图表$p:\mathcal{I}\to\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$, 有$(\varprojlim_\alpha p_\alpha)(X)=\varprojlim_\alpha p_\alpha(X)$, $(\varinjlim_\alpha p_\alpha)(X)=\varinjlim_\alpha p_\alpha(X)$, $X\in\mathcal{C}$. 特别地, 预层范畴$\mathcal{P}(\mathcal{C})$有所有小极限和小余极限.

例2.2.7. 设$\mathcal{C}$是一个局部小范畴, $X\in\mathcal{C}$是一个对象. 则根据极限的定义易知, 可表示函子$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X):\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{S}et$和$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-):\mathcal{C}\to\mathcal{S}et$保持所有($\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$或$\mathcal{C}$中存在的)极限. 因此Yoneda嵌入$j:\mathcal{C}\to\mathcal{P}(\mathcal{C})$保持所有($\mathcal{C}$中存在的)极限.

例2.2.8. 遗忘函子$\mathcal{T}op,\mathcal{G}rp,\mathcal{A}bel,\mathcal{R}ing,\mathcal{CR}ing\to\mathcal{S}et$保持所有小极限和小正向极限. (事实上, 这些遗忘函子都是可表示函子, 且有左伴随.)

定理2.2.9. 若函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$是$G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$的左伴随, 则$F$保持所有($\mathcal{C}$中存在的)余极限, G保持所有($\mathcal{D}$中存在的)极限.

证明. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(\varprojlim Y_\alpha))\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),\varprojlim Y_\alpha)\cong\varprojlim\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),Y_\alpha)\cong\varprojlim\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y_\alpha))$, 因此$G(\varprojlim Y_\alpha)$实现了极限$\varprojlim G(Y_\alpha)$. 同理可证$F$保持所有余极限. □

命题2.2.10. 设函子$L:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$有一个完全忠实的右伴随$\iota$. (1) 若$\mathcal{C}$有小余极限, 则$\mathcal{D}$也有小余极限. (2) 若$\mathcal{C}$有小极限, 则$\mathcal{D}$也有小极限.

证明. (1) 设$\mathcal{D}$中的一个小图表在$\mathcal{C}$中的余极限是Y, 则$L(Y)$是该图表在$\mathcal{D}$中的余极限. (2) 设$\mathcal{D}$中的一个小图表在$\mathcal{C}$中的极限是Y, 则典范态射$Y\to L(Y)$是同构, 因此$L(Y)$是该图表在$\mathcal{D}$中的极限. □

2.3. **极限的交换性.**

定理2.3.1. 一个范畴中的极限与极限交换. 即对一个图表$p:\mathcal{I}\times\mathcal{J}\to\mathcal{C}$, 如果二重极限

$$\varprojlim_{\alpha\in\mathcal{I}}\varprojlim_{\beta\in\mathcal{J}}p(\alpha,\beta),\quad \varprojlim_{\beta\in\mathcal{J}}\varprojlim_{\alpha\in\mathcal{I}}p(\alpha,\beta)$$

都存在, 则两者都是图表p的极限$\varprojlim_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{I}\times\mathcal{J}}p(\alpha,\beta)$, 从而典范同构.

证明. 由于可表示函子保持极限, 利用Yoneda引理可将问题转化到集合范畴$\mathcal{S}et$中. 然后直接验证. □

定理2.3.2. 在集合范畴$\mathcal{S}et$中, 小正向极限与有限极限交换. 即对于小正向集Λ, 有限范畴$\mathcal{I}$, 和图表$p:\Lambda\times\mathcal{I}\to\mathcal{S}et$, 有自然同构

$$\varinjlim_{\alpha\in\Lambda}\varprojlim_{\beta\in\mathcal{I}}p(\alpha,\beta)\cong\varprojlim_{\beta\in\mathcal{I}}\varinjlim_{\alpha\in\Lambda}p(\alpha,\beta).$$

证明. 由于有限极限可由终对象和拉回表出, 只需证明拉回与小正向极限交换. 我们有自然的双射$\varinjlim_{\alpha\in\Lambda}(X_\alpha\times_{Z_\alpha}Y_\alpha)\to(\varinjlim_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha)\times_{(\varinjlim_{\alpha\in\Lambda}Z_\alpha)}(\varinjlim_{\alpha\in\Lambda}Y_\alpha)$, $[(x_\alpha,y_\alpha)]\mapsto([x_\alpha],[y_\alpha])$. □

推论2.3.3. 在范畴$\mathcal{T}op,\mathcal{G}rp,\mathcal{A}bel,\mathcal{R}ing,\mathcal{CR}ing$中, 有限极限与小正向极限交换.

2.4. **加法范畴和Abel范畴.** 加法范畴和Abel范畴的典型例子是一个环的模范畴. 加法范畴的特点是有直和以及链复形的概念, 并且态射可以做加减法. Abel范畴则还有正合性及同调的概念.

定义2.4.1. 一个局部小范畴$\mathcal{A}$称为一个**加法范畴**, 如果它满足下列条件:

(1) $\mathcal{A}$有零对象0, 有有限乘积和余乘积.
(2) 根据(1), 对任意两个对象$X,Y\in\mathcal{A}$, 复合态射$X\xrightarrow{\mathrm{Id}\times 0}X\times Y$, $Y\xrightarrow{0\times\mathrm{Id}}X\times Y$确定一个典范态射$X\coprod Y\to X\times Y$. 我们要求这些典范态射都是同构. 我们将$X\coprod Y\cong X\times Y$记作$X\oplus Y$, 称为$X$与$Y$的**直和**.
(3) 根据(1)(2), 对任意两个对象$X,Y\in\mathcal{A}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$有加法半群结构: $f+g$定义为复合态射$X\to X\times X\xrightarrow{f\times g}Y\times Y\cong Y\coprod Y\to Y$, 以零态射为单位元. 我们要求这些加法半群$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$都是Abel群.

设$\mathcal{A},\mathcal{B}$是加法范畴. 一个函子$F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$称为**加法函子**, 如果$F$保持有限乘积(或等价地保持有限余乘积).

习题2.4.2. 设$\mathcal{A}$是加法范畴. 证明对任意对象$X,Y,Z\in\mathcal{A}$, 态射复合$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,Z)\times\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Z)$是Abel群的双线性映射. 并由此推出可表示函子$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,-):\mathcal{A}\to\mathcal{S}et$自动提升为一个函子$\mathcal{A}\to\mathcal{A}bel$.

习题2.4.3. 设$F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$是加法范畴间的加法函子. 证明: 对任意$X,Y\in\mathcal{C}$, 映射$F:\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X),F(Y))$是一个Abel群同态.

定义2.4.4. 设$\mathcal{A}$是一个有零对象0的范畴. 一个态射$f: X \to Y$的**核**和**余核**分别定义为拉回和推出

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker} f \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ 0 \arrow[r] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{Coker} f. \end{tikzcd}$$

f的**像**和**余像**分别定义为推出和拉回

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker} f \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{Im} f \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \operatorname{Coim} f \arrow[r, "q"] \arrow[d] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{Coker} f. \end{tikzcd}$$

当这些极限和余极限都存在时, 态射f有典范的分解$X \xrightarrow{p} \operatorname{Im} f \to \operatorname{Coim} f \xrightarrow{q} Y$, 并且下列诱导图表分别是拉回和推出

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker} f \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{Coim} f \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \operatorname{Im} f \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{Coker} f \end{tikzcd}$$

定义2.4.5. 一个加法范畴$\mathcal{A}$称为一个**Abel范畴**, 若$\mathcal{A}$有有限极限和有限余极限, 并且对$\mathcal{A}$中每个态射f, 典范态射$\operatorname{Im} f \to \operatorname{Coim} f$都是同构.

注2.4.6. 若$\mathcal{A}$是加法范畴(Abel范畴), 则$\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$也是.

例2.4.7. 一个环A的模范畴LMod_A是Abel范畴. 若A是Noether环, 则A的有限生成的模组成的LMod_A的完全子范畴也是Abel范畴.

例2.4.8. $\mathcal{S}et$, $\mathcal{T}op$, $\mathcal{R}ing$, $\mathcal{CR}ing$都不是加法范畴, 因为它们没有零对象. $\mathcal{T}op_*$和$\mathcal{G}rp$不是加法范畴, 因为典范态射$X \coprod Y \to X \times Y$一般不是同构.

习题2.4.9. 证明下述命题:

(1) 在一个加法范畴中, 一个态射f是单射, 当且仅当f的核是零对象.
(2) 在一个加法范畴中, X是态射$f, g: Y \to Z$的equalizer当且仅当X是态射$f - g: Y \to Z$的核.
(3) 在一个Abel范畴中, 一个态射f是同构, 当且仅当f既单且满.

定义2.4.10. 一个加法范畴中的**链复形**C_*是一个序列$\cdots \to C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$, 使得$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$. 进而可定义链映射和链同伦.

一个Abel范畴中的链复形C_*的p维**同调**定义为诱导态射$\operatorname{Im} \partial_{n+1} \to \operatorname{Ker} \partial_n$的余核, 记作$H_p(C_*)$.

定义2.4.11. 一个Abel范畴中的序列$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$称为在$Y$处**正合**, 如果诱导态射$\operatorname{Im} f \to Y$是$g$的核. 称一个序列$\cdots \to X_{n+1} \to X_n \to X_{n-1} \to \cdots$ **正合**, 若它在每个X_n处正合.

例2.4.12. 在一个Abel范畴中, 我们有下列事实.

(1) 一个序列$0 \to X \xrightarrow{f} Y$正合, 当且仅当$f$是单射.
(2) 一个序列$0 \to X \xrightarrow{f} Y \to 0$正合, 当且仅当$f$是同构.
(3) 一个序列$0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$正合, 当且仅当$X$是$g$的核.
(4) 对于任意态射$f: X \to Y$, 有正合列$0 \to \operatorname{Ker} f \to X \xrightarrow{f} Y \to \operatorname{Coker} f \to 0$.

定义2.4.13. 设范畴$\mathcal{C}$有有限极限(有限余极限). 一个函子$F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$称为**左正合的**(**右正合的**), 如果$F$保持有限极限(有限余极限). 如果$F$既是左正合的又是右正合的, 则称$F$是**正合的**.

例2.4.14. (1) 若局部小范畴$\mathcal{C}$有有限极限, 则可表示函子$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-):\mathcal{C}\to\mathcal{S}et$是左正合的.
(2) 若范畴$\mathcal{C}$有有限极限(有限余极限), 则任一右(左)伴随函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$是左(右)正合的.

命题2.4.15. 设$\mathcal{A},\mathcal{B}$是Abel范畴. 一个函子$F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$是左正合的, 当且仅当下列条件成立:
(1) F是加法函子.
(2) F将$\mathcal{A}$中形如$0\to X\to Y\to Z$的正合列映为$\mathcal{B}$中的正合列$0\to F(X)\to F(Y)\to F(Z)$.

证明. 条件(1)等价于F保持有限乘积. 条件(2)等价于F保持核, 又等价于F保持equalizer. □

习题2.4.16. 设$\mathcal{A},\mathcal{B}$是Abel范畴. $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$是一个函子. 证明下列陈述等价:
(1) F是正合的.
(2) F将$\mathcal{A}$中形如$0\to X\to Y\to Z\to 0$的正合列映为$\mathcal{B}$中的正合列.
(3) F将$\mathcal{A}$中的任意正合列映为$\mathcal{B}$中的正合列.

定义2.4.17. 设$\mathcal{A}$是一个Abel范畴. 我们称一个对象$P\in\mathcal{C}$是**投射的**, 如果函子$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,-):\mathcal{A}\to\mathcal{A}bel$是正合的. 称一个对象$I\in\mathcal{C}$是**内射的**, 如果函子$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,I):\mathcal{A}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{A}bel$是正合的.

命题2.4.18. 设$\mathcal{A}$是一个Abel范畴, $P\in\mathcal{A}$. 证明下列陈述等价:
(1) P是投射的.
(2) 函子$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,-):\mathcal{A}\to\mathcal{A}bel$是右正合的.
(3) 函子$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,-):\mathcal{A}\to\mathcal{A}bel$保持满射.
(4) 对$\mathcal{A}$中的任意满射$f:X\to Y$及态射$g:P\to Y$, 存在态射$h:P\to X$使得$f\circ h=g$.

证明. (1) $\Leftrightarrow$ (2), 因为$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,-)$左正合. (2) $\Rightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4), 显然. (3) $\Rightarrow$ (2), 令$F=\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,-)$. 则$F$左正合, 因此是加法函子. 任取$\mathcal{A}$中的正合列$X\xrightarrow{f}Y\to Z\to 0$. 有满射$X\to\operatorname{Im}f$和正合列$0\to\operatorname{Im}f\to Y\to Z\to 0$. 因此有满射$F(X)\to F(\operatorname{Im}f)$和正合列$0\to F(\operatorname{Im}f)\to F(Y)\to F(Z)\to 0$. 因此有正合列$F(X)\to F(Y)\to F(Z)\to 0$. □