目 录

1. 范畴

1.1. **Grothendieck宇宙.**

粗略而言, 如果我们在一个集合U里可以进行所有的数学操作, 那么这个集合就称为一个Grothendieck宇宙.

定义1.1.1. 一个**Grothendieck宇宙**是一个集合U, 满足下列公理:

(*i*) 如果$x \in U$且$y \in x$, 则$y \in U$.
(*ii*) 如果$x \in U$, 则幂集$P(x) \in U$.
(*iii*) 如果$I \in U$, $x : I \to U$是一个映射, 则集合的并$\bigcup_{\alpha \in I} x(\alpha) \in U$.

引理1.1.2. (1) 如果$x \in U$且$y \subset x$, 则$y \in U$.
(2) 如果$U \neq \emptyset$, 则$\emptyset \in U$.
(3) 如果$x, y \in U$, 则$x \cup y \in U$.
(4) 如果$x, y \in U$, 则$x \times y \in U$.

证明. (1) 因为$y \in P(x)$, 所以根据公理(i)和(ii)得$y \in U$.
(2) 是(1)的推论.
(3) 两元素集合$P(P(\emptyset)) \in U$.
(4) $x \times y \subset P(P(x \cup y))$. (有序对定义为$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.)

$\square$

命题1.1.3. (1) 如果$I \in U$, $x : I \to U$是一个映射, 则$\bigcap_{\alpha \in I} x(\alpha) \in U$.
(2) 如果$I \in U$, $x : I \to U$是一个映射, 则$\coprod_{\alpha \in I} x(\alpha) \in U$.
(3) 如果$I \in U$, $x : I \to U$是一个映射, 则$\prod_{\alpha \in I} x(\alpha) \in U$.
(4) 如果$x, y \in U$, 则$y^x \in U$.

证明. (1) $\bigcap_{\alpha \in I} x(\alpha) \subset \bigcup_{\alpha \in I} x(\alpha)$.
(2) $\coprod_{\alpha \in I} x(\alpha) \subset I \times \bigcup_{\alpha \in I} x(\alpha)$.
(3) $\prod_{\alpha \in I} x(\alpha) \subset P(I \times \bigcup_{\alpha \in I} x(\alpha))$.
(4) $y^x \subset P(x \times y)$.

$\square$

习题1.1.4. 证明: 若U是一个Grothendieck宇宙, 则$U \notin U$.

例1.1.5. (1) 空集$\emptyset$是一个Grothendieck宇宙.
(2) 所有遗传有限集(hereditarily finite sets)组成的集合$V_\omega = P(\emptyset) \cup P^2(\emptyset) \cup \cdots$是一个Grothendieck宇宙.

接下来我们选定一个Grothendieck宇宙U使得自然数集$\mathbb{N} \in U$. 如果一个集合X含于U, 则称X是**小的**, 否则称X是**大的**.

如不做特别说明, 我们提到的拓扑空间, 以及群、环、模、线性空间等代数概念都将假设是小的.

1.2. **范畴的定义.**

定义1.2.1. 一个**范畴**$\mathcal{C}$由下列要素组成

(1) 一个集合$Ob(\mathcal{C})$, 其中的元素称为$\mathcal{C}$的**对象**. 我们用记号$X \in \mathcal{C}$表示X是范畴$\mathcal{C}$的一个对象.
(2) 每两个对象$X, Y \in \mathcal{C}$有一个集合$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, 其中的元素称为从$X$到$Y$的**态射**. 我们用记号$f : X \to Y$表示$f$是一个从$X$到$Y$的态射.
(3) 每三个对象$X, Y, Z \in \mathcal{C}$有一个映射$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$, 称为**复合规则**.

它们满足下列公理

- (单位律) 每个对象$X \in \mathcal{C}$有一个态射$\mathrm{Id}_X : X \to X$, 称为**恒同态射**, 使得对任意态射$f : Y \to X$有$\mathrm{Id}_X \circ f = f$, 对任意态射$g : X \to Z$有$g \circ \mathrm{Id}_X = g$.
- (结合律) 对任意态射$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$, 有$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

注1.2.2. 恒同态射Id_X是唯一的.

例1.2.3. (1) 小集合及集合映射组成的集合范畴$\mathcal{S}et$.
(2) 拓扑空间范畴$\mathcal{T}op$, 流形范畴.
(3) 群范畴$\mathcal{G}rp$, Abel群范畴$\mathcal{A}bel$, 一个域k上的线性空间范畴$\mathcal{V}ect_k$, 一个环A的左模范畴LMod_A.
(4) (含单位元的)环范畴$\mathcal{R}ing$, 交换环范畴$\mathcal{CR}ing$.
(5) 带基点的拓扑空间范畴$\mathcal{T}op_*$, 同伦范畴$\mathcal{T}op^{hom}$.
(6) 偏序集$(X, \leq)$.
(7) **反向范畴**$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$: $Ob(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = Ob(\mathcal{C})$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$.
(8) **乘积范畴**$\mathcal{C}\times\mathcal{D}$: $Ob(\mathcal{C}\times\mathcal{D}) = Ob(\mathcal{C})\times Ob(\mathcal{D})$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((X, Y), (X', Y')) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X')\times \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Y')$.

定义1.2.4. 设$\mathcal{C}$是一个范畴. $\mathcal{C}$中的一个态射$f: X \to Y$称为**同构**, 若存在$g: Y \to X$, 使得$g \circ f = \mathrm{Id}_X$, $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$. 此时称$X$与$Y$**同构**, 记作$X \cong Y$. 如果$\mathcal{C}$中的态射都是同构, 则称$\mathcal{C}$是一个**群胚**.

$\mathcal{C}$中的一个态射$f: X \to Y$称为**单射**, 若对任意$Z \in \mathcal{C}$, 与f复合诱导单射$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y)$. 此时称$X$是$Y$的一个**子对象**

$\mathcal{C}$中的一个态射$f: X \to Y$称为**满射**, 若对任意$Z \in \mathcal{C}$, 与f复合诱导单射$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$. 此时称$Y$是$X$的一个**商对象**

注1.2.5. 若$f: X \to Y$是同构, 则f既单且满. 反之不一定. 比如在一个偏序集中, 所有态射既单且满, 但只有恒同态射是同构.

定义1.2.6. 称范畴$\mathcal{D}$是$\mathcal{C}$的**子范畴**, 如果$Ob(\mathcal{D}) \subset Ob(\mathcal{C})$, 对于$X, Y \in \mathcal{D}$有$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, 并且$\mathcal{D}$的态射复合是$\mathcal{C}$的限制. $\mathcal{C}$的一个子范畴$\mathcal{D}$称为**完全的**, 如果对任意$X, Y \in \mathcal{D}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

例1.2.7. (1) $\mathcal{A}bel$是$\mathcal{G}rp$的完全子范畴. $\mathcal{CR}ing$是$\mathcal{R}ing$的完全子范畴.
(2) 有限维线性空间组成$\mathcal{V}ect_k$的一个完全子范畴.
(3) 全体小集合和集合单射组成$\mathcal{S}et$的一个子范畴.

范畴	始对象/ 终对象	乘积	余乘积	同构	单/满射
$\mathcal{S}et$	$\emptyset$ / 单元素集	Descartes积	无交并	双射	单/满射
$\mathcal{T}op$	$\emptyset$ / pt	乘积空间	无交并	同胚	连续单/满射
$\mathcal{T}op_*$	$(\mathrm{pt}, \mathrm{pt})$	乘积空间	一点并	同胚	连续单/满射
$\mathcal{G}rp$	平凡群	群直积	自由乘积	群同构	单/满同态
$\mathcal{A}bel$	0	群直积	直和	群同构	单/满同态
$\mathcal{R}ing$	$\mathbb{Z}$ / 0	环直积	自由乘积	环同构	单同态/-
$\mathcal{CR}ing$	$\mathbb{Z}$ / 0	环直积	张量积	环同构	单同态/-
偏序集	最小元/ 最大元	下确界	上确界	恒同	全部态射

注1.2.8. 一个范畴可以看作一个有向图, 其中的顶点是对象, 箭头是态射. 图上附带一个箭头的复合运算, 运算满足单位律和结合律.

我们考虑集合范畴$\mathcal{S}et$所对应的有向图. 忘掉所有集合的信息, 仅从这个图我们可以还原出范畴$\mathcal{S}et$几乎所有的信息: 图里的一个顶点来自于空集, 当且仅当它到每个顶点有且只有一个箭头. 图里的一个顶点来自于单元素集, 当且仅当每个顶点到它有且只有一个箭头. 一个顶点所对应的集合的元素与单元素集到它的箭头一一对应.

这个例子告诉我们, 范畴里一个对象的信息都含在它与其它对象的态射中. 稍后的Yoneda引理会更好地阐释这一点.

1.3. 函子与自然变换.

定义1.3.1. 设$\mathcal{C}, \mathcal{D}$是两个范畴. 一个**函子**$F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$包括下列对应

(1) 每个$\mathcal{C}$中的对象$X \in \mathcal{C}$, 对应$\mathcal{D}$中的一个对象$F(X) \in \mathcal{D}$.
(2) 每个$\mathcal{C}$中的态射$f: X \to Y$, 对应$\mathcal{D}$中的一个态射$F(f): F(X) \to F(Y)$.

它们满足下列公理

- (单位律) 对$\mathcal{C}$中的每个对象$X \in \mathcal{C}$, $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$.
- (复合律) 对$\mathcal{C}$中的任意态射$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, 有$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

习题1.3.2. 设$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$是一个函子. 证明: F将同构映为同构.

定义1.3.3. 一个函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$称为**忠实的**(**完全的**, **完全忠实的**), 如果对任意$X, Y \in \mathcal{C}$, F诱导的映射$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$是单射(满射,双射).

定义1.3.4. 设$\mathcal{C}, \mathcal{D}$是两个范畴, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$是两个函子. 一个函子的**自然变换**$\xi : F \to G$是一系列自然的态射$\xi_X : F(X) \to G(X)$, $X \in \mathcal{C}$. 具体而言, ξ对$\mathcal{C}$中的每个对象$X \in \mathcal{C}$, 指定$\mathcal{D}$中的一个态射$\xi_X : F(X) \to G(X)$, 使得对任一$\mathcal{C}$中的态射$f : X \to Y$, 下列图表交换

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\xi_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\xi_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y). \end{tikzcd}$$

一个函子**同构**$\xi : F \to G$是一系列自然的同构$\xi_X : F(X) \to G(X)$, $X \in \mathcal{C}$. 具体而言, ξ是一个自然变换, 且对所有的$X \in \mathcal{C}$, ξ_X都是同构. 此时称函子F与G**同构**, 记作$F \cong G$.

习题1.3.5. 证明: 一个自然变换$\xi : F \to G$是函子同构, 当且仅当存在自然变换$\eta : G \to F$使得$\eta \circ \xi = \mathrm{Id}_F$, $\xi \circ \eta = \mathrm{Id}_G$.

定义1.3.6. 一个函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$称为**范畴等价**, 若存在函子$G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, 使得$G \circ F \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$, $F \circ G \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$. 此时称范畴$\mathcal{C}$与$\mathcal{D}$**等价**, 记作$\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$.

例1.3.7. (1) 恒同函子$\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. 恒同自然变换$\mathrm{Id}_F : F \to F$.

(2) 遗忘函子$\mathcal{T}op \to \mathcal{S}et$, $\mathcal{G}rp \to \mathcal{S}et$, $\mathcal{R}ing \to \mathcal{A}bel$, $\mathcal{T}op_* \to \mathcal{T}op$. 它们都是忠实的, 但不是完全的.

(3) 子范畴的含入函子是忠实的, 完全子范畴的含入函子是完全忠实的.

(4) 同调群函子$H_n : \mathcal{T}op \to \mathcal{A}bel$, 上同调群函子$H^n : \mathcal{T}op \to \mathcal{A}bel^{\mathrm{op}}$. 基本群函子$\pi_1 : \mathcal{T}op_* \to \mathcal{G}rp$, 同伦群函子$\pi_n : \mathcal{T}op_* \to \mathcal{A}bel$, $n \geq 2$, 和道路分支函子$\pi_0 : \mathcal{T}op \to \mathcal{S}et$. 它们既不是忠实的, 也不是完全的. 自然变换$H^n \to \mathrm{hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(-), \mathbb{Z})$.

(5) 函数环函子$\mathcal{T}op \to \mathcal{CR}ing^{\mathrm{op}}$, $X \mapsto C(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(X, \mathbb{R})$.

(6) 对偶空间函子$D : \mathcal{V}ect_k \to \mathcal{V}ect_k^{\mathrm{op}}$, 它是忠实的但不是完全的. 自然变换$\mathrm{Id} \to D^2$.

(7) 函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$诱导一个函子$F^{\mathrm{op}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$.

定义1.3.8. 设$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$是一个函子. 我们称$X \in \mathcal{D}$属于$F$的**本质像**, 如果存在$Y \in \mathcal{C}$, 使得$X \cong F(Y)$. 我们称$F$是**本质满的**, 如果$\mathcal{D}$中的对象都属于$F$的本质像.

注1.3.9. 若两个函子同构, 则它们有相同的本质像.

命题1.3.10. 一个函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$是范畴等价的充分必要条件是: (1) F是完全忠实的, (2) F是本质满的.

证明. 充分性. 对于$X \in \mathcal{D}$, 根据(2)我们可选取$G(X) \in \mathcal{C}$及同构$\xi_X : F(G(X)) \to X$. 对于$\mathcal{D}$中态射$f : X \to Y$, 根据(1)存在唯一态射$G(f) : G(X) \to G(Y)$使得$F(G(f)) = \xi_Y^{-1} \circ f \circ \xi_X$. 于是我们得到一个函子$G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, 并且有函子同构$\xi : F \circ G \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$. 另一方面, 对于$Z \in \mathcal{C}$, 根据(1)同构$\xi_{F(Z)} : FGF(Z) \to F(Z)$决定了一个同构$\eta_Z : GF(Z) \to Z$. 因此有函子同构$\eta : G \circ F \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$.

必要性. 设$G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$是$F$的逆. (1) 对于$X, Y \in \mathcal{C}$, 映射$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$有逆映射$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)) \xrightarrow{G} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GF(X), GF(Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. (2) 对于$X \in \mathcal{D}$, 函子同构$F \circ G \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$给出一个同构$F(G(X)) \cong X$. □

推论1.3.11. 设$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$是一个完全忠实的函子, $\mathcal{D}'$是由F的本质像组成的$\mathcal{D}$的完全子范畴. 则F诱导了范畴等价$\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}'$.

习题1.3.12. 设$X \in \mathcal{S}et$是一个单元素集. 证明: 函子$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(X,-) : \mathcal{S}et \to \mathcal{S}et$是一个范畴等价.

习题1.3.13. 证明: 由全体拓扑空间及全体映射组成的范畴与$\mathcal{S}et$等价.

1.4. **Yoneda引理.**

定义1.4.1. 一个范畴$\mathcal{C}$称为**局部小的**, 如果任意两个对象间的态射集合$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$是小的. 一个范畴$\mathcal{C}$称为**小的**, 如果$\mathcal{C}$是局部小的, 并且$Ob(\mathcal{C})$是一个小集合. 一个范畴$\mathcal{C}$称为**本质小的**, 如果$\mathcal{C}$等价于一个小范畴.

例1.4.2. $\mathcal{S}et$的有限集组成的完全子范畴是本质小的, 但不是小的.

定义1.4.3. 设$\mathcal{C},\mathcal{D}$是范畴. 全体函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$及自然变换构成一个范畴, 记作$\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$. 特别地, 范畴$\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathcal{S}et)$称为$\mathcal{C}$上的**预层范畴**, 记作$\mathcal{P}(\mathcal{C})$, 其中的对象称为$\mathcal{C}$上的**预层**. 对于局部小范畴$\mathcal{C}$, 我们将函子$j : \mathcal{C} \to \mathcal{P}(\mathcal{C})$, $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)$称为**Yoneda嵌入**.

注1.4.4. 如果$\mathcal{C}$是小范畴且$\mathcal{D}$是(局部)小范畴, 则$\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$也是(局部)小范畴.

注1.4.5. 当$\mathcal{C}$不是一个(局部)小范畴, 我们可以通过放大宇宙使得$\mathcal{C}$成为一个(局部)小范畴. 因此我们对于(局部)小范畴的结论, 通常都可用于一般的范畴.

命题1.4.6. 设$\mathcal{C}$是一个局部小范畴, $X \in \mathcal{C}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$. 我们有双射$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}(\mathcal{C})}(j(X),\mathcal{F}) \to \mathcal{F}(X)$, $\xi \mapsto \xi_X(\mathrm{Id}_X)$.

证明. 对于$x \in \mathcal{F}(X)$, 我们有自然变换$\xi_x : j(X) \to \mathcal{F}$, 使得$(\xi_x)_Z = \mathcal{F}(-)(x) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X) \to \mathcal{F}(Z)$. 映射$x \mapsto \xi_x$与$\xi \mapsto \xi_X(\mathrm{Id}_X)$互逆. $\square$

推论1.4.7 (Yoneda引理)**.** 设$\mathcal{C}$是一个局部小范畴. 则Yoneda嵌入$j : \mathcal{C} \to \mathcal{P}(\mathcal{C})$是完全忠实的.

定义1.4.8. 设$\mathcal{C}$是一个局部小范畴. 称一个函子$F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}et$是**可表示的**, 如果$F$同构于某个函子$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)$; 换言之, F属于Yoneda嵌入的本质像.

注1.4.9. 根据Yoneda引理, 表示一个函子$F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}et$的对象$X$在典范同构下唯一.

例1.4.10. 遗忘函子$For : (\mathcal{T}op^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}et$由单元素集表示.

习题1.4.11. 证明遗忘函子$For : \mathcal{G}rp \to \mathcal{S}et$, $For : \mathcal{R}ing \to \mathcal{S}et$是可表示的.

习题1.4.12. 证明函子$\mathcal{G}rp \to \mathcal{S}et$, $G \mapsto \{g \in G \mid g^2 = 1\}$是可表示的.

1.5. **伴随函子.**

定义1.5.1. 一个**伴随**由一对函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$和一个自然的双射$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y))$组成. 此时称$F$是$G$的**左伴随函子**, G是F的**右伴随函子**.

例1.5.2. (1) 遗忘函子$\mathcal{T}op, \mathcal{G}rp, \mathcal{A}bel, \mathcal{R}ing, \mathcal{CR}ing \to \mathcal{S}et$有左伴随函子, 将一个集合$S$映为由$S$生成的离散空间, 自由群, 自由Abel群, $\mathbb{Z}$上的自由代数, $\mathbb{Z}$上的多项式环.

(2) 设$\phi : A \to B$是环同态. 函子$\phi_* : \mathrm{LMod}_B \to \mathrm{LMod}_A$, $N \mapsto {}_AN$有左伴随函子$\phi^* = B \otimes_A - : \mathrm{LMod}_A \to \mathrm{LMod}_B$, 和右伴随函子$\phi^! = \mathrm{hom}_A(B,-) : \mathrm{LMod}_A \to \mathrm{LMod}_B$.

(3) 设A是一个交换环, N是一个A模. 由张量积的定义, $-\otimes_A N : \mathrm{LMod}_A \to \mathrm{LMod}_A$是$\mathrm{hom}_A(N,-) : \mathrm{LMod}_A \to \mathrm{LMod}_A$的左伴随函子.

注1.5.3. 若函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$是$G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$的左伴随, 则$F^{\mathrm{op}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$是$G^{\mathrm{op}} : \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$的右伴随.

习题1.5.4. 设函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $F' : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$分别是$G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, $G' : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$的左伴随. 证明: $F' \circ F$是$G \circ G'$的左伴随.

命题1.5.5. 设$\mathcal{C},\mathcal{D}$是局部小范畴. 一个函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$有右伴随的充分必要条件是, 对每个$Y \in \mathcal{D}$, 函子$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-),Y) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}et$是可表示的.

证明. 必要性. 设$G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$是$F$右伴随. 由伴随函子的定义, $G(Y)$表示函子$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-),Y)$.

充分性. 设函子$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-),Y)$由$G(Y)$表示. 对于$\mathcal{D}$中一个态射$f:Y\to Y'$, 根据Yoneda引理, 自然变换$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,G(Y))\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-),Y)\xrightarrow{f\circ-}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-),Y')\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,G(Y'))$给出一个态射$G(f):G(Y)\to G(Y')$. 这样我们得到一个函子$G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$, 它是$F$的右伴随. □

推论1.5.6 (伴随函子的唯一性)**.** 若一个函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$有右伴随, 则右伴随函子在典范同构下唯一.

定理1.5.7. 函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$是$G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$的左伴随的充分必要条件是, 存在自然变换$u:\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}\to G\circ F$和$v:F\circ G\to\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, 使得下列两个复合自然变换都是恒同

$$F=F\circ\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}\xrightarrow{\mathrm{Id}_F\circ u}F\circ G\circ F\xrightarrow{v\circ\mathrm{Id}_F}\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}\circ F=F,$$

$$G=\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}\circ G\xrightarrow{u\circ\mathrm{Id}_G}G\circ F\circ G\xrightarrow{\mathrm{Id}_G\circ v}G\circ\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}=G.$$

证明. 充分性. 我们有两个映射

$$\Phi:\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),Y)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y)),\quad f\mapsto(X\xrightarrow{u_X}GF(X)\xrightarrow{G(f)}G(Y)),$$

$$\Psi:\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y))\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),Y),\quad g\mapsto(F(X)\xrightarrow{F(g)}FG(Y)\xrightarrow{v_Y}Y).$$

有$\Psi\Phi(f)=(F(X)\xrightarrow{F(u_X)}FGF(X)\xrightarrow{FG(f)}FG(Y)\xrightarrow{v_Y}Y)$. 由$v$的自然性, $\Psi\Phi(f)=(F(X)\xrightarrow{F(u_X)}FGF(X)\xrightarrow{v_{F(x)}}F(X)\xrightarrow{f}Y)=f$. 同理可证$\Phi\Psi(g)=g$.

必要性. 令$u_X:X\to GF(X)$是$\mathrm{Id}_{F(X)}$在自然同构$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(X))\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,GF(X))$下的像, $v_Y:FG(Y)\to Y$是$\mathrm{Id}_{G(X)}$在自然同构$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G(Y),G(Y))\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FG(Y),Y)$下的像. 从而得到自然变换$u$, v. 由交换图表

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GF(X),GF(X)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FGF(X),F(X)) \\
{\scriptstyle -\circ u_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle -\circ F(u_X)} \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,GF(X)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(X))
\end{array}$$

可知第一个复合自然变换是恒同. 同理可证第二个. □

习题1.5.8. 设$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$是$G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$的左伴随函子, $\mathcal{E}$是一个范畴. 证明: $F\circ-:\mathrm{Fun}(\mathcal{E},\mathcal{C})\to\mathrm{Fun}(\mathcal{E},\mathcal{D})$是$G\circ-:\mathrm{Fun}(\mathcal{E},\mathcal{D})\to\mathrm{Fun}(\mathcal{E},\mathcal{C})$的左伴随函子.

习题1.5.9. 设函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$有右伴随函子$G$. 证明: F是完全忠实的, 当且仅当$u:\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}\to G\circ F$是同构.

定义1.5.10. 称一个函子$G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$是**保守的**, 若对任意$\mathcal{D}$中的态射$f$, f是同构当且仅当$G(f)$是同构.

习题1.5.11. 设函子$G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$有左伴随$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$. 证明: G是范畴等价当且仅当F是完全忠实的且G是保守的.

2. 极限

2.1. 极限的定义.

定义2.1.1. 设$\mathcal{C}$是一个范畴. 称一个对象$X\in\mathcal{C}$是一个**始对象**, 如果X到每个对象$Y\in\mathcal{C}$都有唯一一个态射; 换言之, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$是单元素集. $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$中的始对象称为$\mathcal{C}$中的**终对象**. 如果$X$既是始对象又是终对象, 则称$X$是一个**零对象**.

设$\mathcal{C}$是一个有零对象的范畴. 一个态射$f:X\to Y$称为**零态射**, 若f穿过零对象.

始对象通常记作$\emptyset$, 终对象通常记作$*$, 零对象和零态射通常记作0.

习题2.1.2. 设$\mathcal{C}$是一个有零对象的范畴. 证明: 对任意$X,Y\in\mathcal{C}$, 存在唯一一个零态射$0:X\to Y$.

注2.1.3. 一个范畴中的始对象(终对象, 零对象)如果存在, 则在典范同构下唯一.

定义2.1.4. 设$\mathcal{C}$是一个范畴. $\mathcal{C}$中的一个**图表**是一个函子$p:\mathcal{I}\to\mathcal{C}$, 其中$\mathcal{I}$是一个范畴, 称为**指标范畴**.

图表p的**极限**是一个对象X, 及一组态射$\{f_\alpha:X\to p(\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$, 使得对任意$\mathcal{I}$中的态射$t:\alpha\to\beta$有$f_\beta=p(t)\circ f_\alpha$; 它们满足下列泛性质: 对任意满足同样条件的对象$Y\in\mathcal{C}$及态射$\{g_\alpha:Y\to p(\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$, 存在唯一态射$h:Y\to X$, 使得$g_\alpha=f_\alpha\circ h$. 通常我们也将$X$称为图表$p$的极限, 记作$\varprojlim p$或$\varprojlim_{\alpha\in\mathcal{I}}p(\alpha)$.

图表$p^{\mathrm{op}}:\mathcal{I}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$的极限称为图表$p$的**余极限**, 记作$\varinjlim p$或$\varinjlim_{\alpha\in\mathcal{I}}p(\alpha)$.

注2.1.5. 一个图表的(余)极限如果存在, 则在典范同构下唯一.

注2.1.6. 给一个图表$p:\mathcal{I}\to\mathcal{C}\times\mathcal{D}$等价于给两个图表$p_1:\mathcal{I}\to\mathcal{C}$和$p_2:\mathcal{I}\to\mathcal{D}$, 并且$\varprojlim p=(\varprojlim p_1,\varprojlim p_2)$, $\varinjlim p=(\varinjlim p_1,\varinjlim p_2)$, .

例2.1.7. (1) 以空集$\emptyset$为指标的极限和余极限分别是终对象和始对象.

(2) 以集合Λ为指标的极限和余极限分别称为**乘积**和**余乘积**, 记作$\prod_{\alpha\in\Lambda}p(\alpha)$和$\coprod_{\alpha\in\Lambda}p(\alpha)$.

(3) 一个偏序集Λ称为一个**反向集(正向集)**, 若Λ的任意有限子集有下界(上界); 特别地, Λ非空. 以反向集(正向集)Λ为指标的极限(余极限), 称为**反向极限(正向极限)**.

(4) 设$\Lambda=\{x,y,z\}$是一个偏序集, 关系为$x\le z$, $y\le z$. 以Λ (Λ^{op})为指标的极限(余极限), 称为**拉回(推出)**, 记作$p(x)\times_{p(z)}p(y)$ ($p(x)\coprod_{p(z)}p(y)$), 或者示以图表

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim p \arrow[r] \arrow[d] & p(x) \arrow[d] \\
p(y) \arrow[r] & p(z)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
p(z) \arrow[r] \arrow[d] & p(x) \arrow[d] \\
p(y) \arrow[r] & \varinjlim p
\end{tikzcd}$$

(5) 设$\mathcal{I}$是由两个对象x,y组成的范畴, 仅有的非恒同态射是两个态射$f,g:x\to y$. 以$\mathcal{I}$为指标的极限和余极限, 分别称为**equalizer**和**coequalizer**, 示以图表

$$\varprojlim p\to p(x)\rightrightarrows p(y),\qquad p(x)\rightrightarrows p(y)\to\varinjlim p.$$

例2.1.8. 在范畴$\mathcal{S}et,\mathcal{T}op,\mathcal{G}rp,\mathcal{A}bel,\mathcal{R}ing,\mathcal{CR}ing$中, 有如下极限和余极限.

(1) 一个小图表p的极限$\varprojlim p=\{(x_\alpha)\in\prod p(\alpha)\mid p(t)(x_\alpha)=x_\beta,\ \forall t:\alpha\to\beta\}$.

(2) 拉回$X\times_Z Y=\{(x,y)\in X\times Y\mid f(x)=g(y)\}$, 其中$f:X\to Z$, $g:Y\to Z$是图表中的态射.

(3) 两个态射$f,g:X\to Y$的equalizer为$\{x\in X\mid f(x)=g(x)\}$.

(4) 一个小正向图表p的正向极限$\varinjlim p$是全体$p(\alpha)$的无交并商掉如下等价关系: $x_\alpha\sim x_\beta$若存在$t:\alpha\to\gamma$, $s:\beta\to\gamma$, 使得$p(t)(x_\alpha)=p(s)(x_\beta)$.

(5) 两个态射$f,g:X\to Y$的coequalizer分别为Y商掉由$\{f(x)\sim g(x)\}_{x\in X}$生成的等价关系, 等价关系, 正规子群, 子群, 双边理想, 理想.

例2.1.9. 设X是一个光滑流形. 对于X的一组开集$\{U_i\}$, 有光滑流形范畴中的coequalizer图表
$$\coprod_{i,j} U_i \cap U_j \rightrightarrows \coprod_i U_i \to \bigcup_i U_i,$$
和$\mathcal{CR}ing$中的equalizer图表
$$C^\infty(\bigcup_i U_i) \to \prod_i C^\infty(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} C^\infty(U_i \cap U_j).$$
对于一点$x \in X$, 全体包含x的开集在包含关系"$\supset$"下构成一个正向集Λ. $\mathcal{CR}ing$中的正向极限$\varinjlim_{U\in\Lambda} C^\infty(U) = C^\infty_x(X)$.

例2.1.10. 设A是一个环, M是一个右A模, N是一个左A模. 则有$\mathcal{A}bel$中coequalizer图表
$$M \otimes A \otimes N \rightrightarrows M \otimes N \to M \otimes_A N.$$

习题2.1.11. 证明: 若$X \xrightarrow{f} Y \rightrightarrows Z$是equalizer图表, 则$f$是单射; 若$Y \rightrightarrows Z \xrightarrow{f} X$是coequalizer图表, 则$f$是满射.

习题2.1.12. 设范畴$\mathcal{I}$有始对象$\emptyset$. 证明: 一个图表$p : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$的极限就是$p(\emptyset)$.

习题2.1.13. 设$\mathcal{D}$是$\mathcal{C}$的完全子范畴, p是$\mathcal{D}$中的一个图表. 证明: 若p在$\mathcal{C}$中的极限存在, 且落在$\mathcal{D}$中, 则它是p在$\mathcal{D}$中的极限.

习题2.1.14. 证明$\mathcal{S}et$与$\mathcal{S}et^{\mathrm{op}}$不等价. [提示: 范畴等价保持所有极限和余极限.]

注2.1.15. (1) 设$p : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$是一个图表, $\phi : \mathcal{J} \to \mathcal{I}$是一个函子. 则有典范态射$\varprojlim p \to \varprojlim (p \circ \phi)$.
(2) 设$p, q : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$是两个图表. 则一个自然变换$p \to q$诱导一个态射$\varprojlim p \to \varprojlim q$.

2.2. 极限的转化.

定理2.2.1. 设$\mathcal{C}$是一个范畴. 下列陈述等价:
(1) $\mathcal{C}$有所有小极限.
(2) $\mathcal{C}$有有限极限和小反向极限.
(3) $\mathcal{C}$有小乘积和拉回.
(4) $\mathcal{C}$有小乘积和equalizer.

设范畴$\mathcal{C}$有所有小极限, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$是一个函子. 下列陈述等价:
(1) F保持所有小极限.
(2) F保持有限极限和小反向极限.
(3) F保持小乘积和拉回.
(4) F保持小乘积和equalizer.

证明. (1) $\Rightarrow$ (2), 显然. (2) $\Rightarrow$ (3), 设Λ是一个小集合. Λ的全体有限子集P在包含关系"$\supset$"下构成一个反向集, 并且$\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$可表为反向极限$\varprojlim_{P\subset\Lambda}(\prod_{\alpha\in P} X_\alpha)$. (3) $\Rightarrow$ (4), 图表$X \rightrightarrows Y$的equalizer可表为拉回$X \times_{X\times Y} X$. (4) $\Rightarrow$ (1), 任一极限可由乘积和equalizer表出. 事实上, 极限$\varprojlim_{\alpha\in\mathcal{I}} p(\alpha)$可表为图表$\prod_{\alpha\in\mathcal{I}} p(\alpha) \rightrightarrows \prod_{t:\alpha\to\beta} p(\beta)$的equalizer, 其中两个态射分别为对角线态射和$\prod_{t:\alpha\to\beta} p(t)$. □

定义2.2.2. 一个范畴$\mathcal{I}$称为**有限的**, 若$\mathcal{I}$有有限个对象, 且$\mathcal{I}$的态射由有限个态射在复合下生成. 以有限范畴为指标的极限称为**有限极限**.

定理2.2.3. 设$\mathcal{C}$是一个范畴, 下列陈述等价:
(1) $\mathcal{C}$有所有有限极限.
(2) $\mathcal{C}$有终对象和拉回.
(3) $\mathcal{C}$有有限乘积和equalizer.

设范畴$\mathcal{C}$有有限极限, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$是一个函子. 下列陈述等价:

(1) F保持所有有限极限.
(2) F保持终对象和拉回.
(3) F保持有限乘积和equalizer.

例2.2.4. 范畴$\mathcal{S}et, \mathcal{T}op, \mathcal{G}rp, \mathcal{A}bel, \mathcal{R}ing, \mathcal{CR}ing$有所有小极限和小余极限, 因为它们有小乘积, equalizer, 小余乘积, coequalizer.

例2.2.5. 设$\mathcal{C}$是一个范畴. 若范畴$\mathcal{D}$有所有小(余)极限, 则范畴$\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$亦然. 事实上, 对于一个图表$p : \mathcal{I} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, 有$(\varprojlim_\alpha p_\alpha)(X) = \varprojlim_\alpha p_\alpha(X)$, $(\varinjlim_\alpha p_\alpha)(X) = \varinjlim_\alpha p_\alpha(X)$, $X \in \mathcal{C}$. 特别地, 预层范畴$\mathcal{P}(\mathcal{C})$有所有小极限和小余极限.

例2.2.6. 设$\mathcal{C}$是一个局部小范畴, $X \in \mathcal{C}$是一个对象. 则根据极限的定义易知, 可表示函子$\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(-, X) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}et$和$\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, -) : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$保持所有($\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$或$\mathcal{C}$中存在的)极限. 因此Yoneda嵌入$j : \mathcal{C} \to \mathcal{P}(\mathcal{C})$保持所有($\mathcal{C}$中存在的)极限.

例2.2.7. 遗忘函子$\mathcal{T}op, \mathcal{G}rp, \mathcal{A}bel, \mathcal{R}ing, \mathcal{CR}ing \to \mathcal{S}et$保持所有小极限和小正向极限. (事实上, 这些遗忘函子都是可表示函子, 且有左伴随.)

定理2.2.8. 若函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$是$G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$的左伴随, 则$F$保持所有($\mathcal{C}$中存在的)余极限, G保持所有($\mathcal{D}$中存在的)极限.

证明. 定理与所选宇宙无关, 因此可通过放大宇宙假设$\mathcal{C}, \mathcal{D}$是局部小的. $\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, G(\varprojlim Y_\alpha)) \cong \mathrm{Hom}_\mathcal{D}(F(X), \varprojlim Y_\alpha) \cong \varprojlim \mathrm{Hom}_\mathcal{D}(F(X), Y_\alpha) \cong \varprojlim \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, G(Y_\alpha))$, 因此$G(\varprojlim Y_\alpha)$实现了极限$\varprojlim G(Y_\alpha)$. 同理可证$F$保持所有余极限. □

命题2.2.9. 设函子$L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$有一个完全忠实的右伴随$\iota$. (1) 若$\mathcal{C}$有小余极限, 则$\mathcal{D}$也有小余极限. (2) 若$\mathcal{C}$有小极限, 则$\mathcal{D}$也有小极限.

证明. (1) 设$\mathcal{D}$中的一个小图表在$\mathcal{C}$中的余极限是Y, 则$L(Y)$是该图表在$\mathcal{D}$中的余极限. (2) 设$\mathcal{D}$中的一个小图表在$\mathcal{C}$中的极限是Y, 则典范态射$Y \to L(Y)$是同构, 因此$L(Y)$是该图表在$\mathcal{D}$中的极限. □

2.3. 极限的交换性.

定理2.3.1. 一个范畴中的极限与极限交换. 即对一个图表$p : \mathcal{I} \times \mathcal{J} \to \mathcal{C}$, 如果二重极限

$$\varprojlim_{\alpha \in \mathcal{I}} \varprojlim_{\beta \in \mathcal{J}} p(\alpha, \beta), \quad \varprojlim_{\beta \in \mathcal{J}} \varprojlim_{\alpha \in \mathcal{I}} p(\alpha, \beta)$$

都存在, 则两者都是图表p的极限$\varprojlim_{(\alpha,\beta) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}} p(\alpha, \beta)$, 从而典范同构.

证明. 由于可表示函子保持极限, 利用Yoneda引理可将问题转化到集合范畴$\mathcal{S}et$中. 然后直接验证. □

定理2.3.2. 在集合范畴$\mathcal{S}et$中, 小正向极限与有限极限交换. 即对于小正向集Λ, 有限范畴$\mathcal{I}$, 和图表$p : \Lambda \times \mathcal{I} \to \mathcal{S}et$, 有自然同构

$$\varinjlim_{\alpha \in \Lambda} \varprojlim_{\beta \in \mathcal{I}} p(\alpha, \beta) \cong \varprojlim_{\beta \in \mathcal{I}} \varinjlim_{\alpha \in \Lambda} p(\alpha, \beta).$$

证明. 由于有限极限可由终对象和拉回表出, 只需证明拉回与小正向极限交换. 我们有自然的双射$\varinjlim_{\alpha \in \Lambda} (X_\alpha \times_{Z_\alpha} Y_\alpha) \to (\varinjlim_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha) \times_{(\varinjlim_{\alpha \in \Lambda} Z_\alpha)} (\varinjlim_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha)$, $[(x_\alpha, y_\alpha)] \mapsto ([x_\alpha], [y_\alpha])$. □

推论2.3.3. 在范畴$\mathcal{T}op, \mathcal{G}rp, \mathcal{A}bel, \mathcal{R}ing, \mathcal{CR}ing$中, 有限极限与小正向极限交换.

2.4. **加法范畴和Abel范畴.** 加法范畴和Abel范畴的典型例子是一个环的模范畴. 加法范畴的特点是有直和以及链复形的概念, 并且态射可以做加减法. Abel范畴则还有正合性及同调的概念.

定义2.4.1. 一个局部小范畴$\mathcal{A}$称为一个**加法范畴**, 如果它满足下列条件:

(1) $\mathcal{A}$有零对象0, 有有限乘积和余乘积.

(2) 根据(1), 对任意两个对象$X, Y \in \mathcal{A}$, 态射$X \xrightarrow{\mathrm{Id} \times 0} X \times Y$和$Y \xrightarrow{0 \times \mathrm{Id}} X \times Y$确定一个典范态射$X \coprod Y \to X \times Y$. 我们要求这些典范态射都是同构. 我们将$X \coprod Y \cong X \times Y$记作$X \oplus Y$, 称为$X$与$Y$的**直和**.

(3) 根据(1)(2), 对任意两个对象$X, Y \in \mathcal{A}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$有加法半群结构: $f + g$定义为复合态射$X \to X \times X \xrightarrow{f \times g} Y \times Y \cong Y \coprod Y \to Y$, 以零态射为单位元. 我们要求这些加法半群$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$都是Abel群.

设$\mathcal{A}, \mathcal{B}$是加法范畴. 一个函子$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$称为**加法函子**, 如果$F$保持有限乘积(或等价地保持有限余乘积).

习题2.4.2. 设$\mathcal{A}$是加法范畴. 证明对任意对象$X, Y, Z \in \mathcal{A}$, 态射复合$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Z)$是Abel群的双线性映射. 并由此推出可表示函子$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -) : \mathcal{A} \to \mathcal{S}et$自动提升为一个函子$\mathcal{A} \to \mathcal{A}bel$.

习题2.4.3. 设$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$是加法范畴间的加法函子. 证明: 对任意$X, Y \in \mathcal{C}$, 映射$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X), F(Y))$是一个Abel群同态.

注2.4.4. 设$\mathcal{A}, \mathcal{B}$是加法范畴. 则$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$也是加法范畴, 并且$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}((X, Y), (X', Y')) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X') \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, Y')$. 我们将$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$记作$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$, 并称其为$\mathcal{A}$与$\mathcal{B}$的**直和**. 在不引起歧义的情况下, 我们将$(X, 0)$和$(0, Y)$分别记作$X$和$Y$. 在这个记号下, $(X, Y) = X \oplus Y$. 特别地, $\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$可视为$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$的完全子范畴.

定义2.4.5. 设$\mathcal{A}$是一个有零对象0的范畴. 一个态射$f : X \to Y$的**核**和**余核**分别定义为拉回和推出

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\, f \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
0 \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d, "\beta"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Coker}\, f.
\end{tikzcd}
$$

f的**像**和**余像**分别定义为推出和拉回

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\, f \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}\, f
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Coim}\, f \arrow[r, "q"] \arrow[d] & Y \arrow[d, "\beta"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Coker}\, f.
\end{tikzcd}
$$

当这些极限和余极限都存在时, 态射f有典范的分解$X \xrightarrow{p} \mathrm{Im}\, f \to \mathrm{Coim}\, f \xrightarrow{q} Y$, 并且下列诱导图表分别是拉回和推出

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\, f \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Coim}\, f
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Im}\, f \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "\beta"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Coker}\, f
\end{tikzcd}
$$

定义2.4.6. 一个加法范畴$\mathcal{A}$称为一个**Abel范畴**, 若$\mathcal{A}$有核及余核, 并且对$\mathcal{A}$中每个态射f, 典范态射$\mathrm{Im}\, f \to \mathrm{Coim}\, f$都是同构.

注2.4.7. 若$\mathcal{A}$是加法范畴(Abel范畴), 则$\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$也是.

例2.4.8. 一个环A的左模范畴LMod_A是Abel范畴. 若A是Noether环, 则A的有限生成的模组成的LMod_A的完全子范畴也是Abel范畴.

例2.4.9. $\mathcal{S}et$, $\mathcal{T}op$, $\mathcal{R}ing$, $\mathcal{CR}ing$都不是加法范畴, 因为它们没有零对象. $\mathcal{T}op_*$和$\mathcal{G}rp$不是加法范畴, 因为典范态射$X\coprod Y\to X\times Y$一般不是同构.

习题2.4.10. 证明下述命题:
(1) 在一个加法范畴中, 一个态射f是单射, 当且仅当f的核是零对象.
(2) 在一个加法范畴中, X是态射$f,g:Y\to Z$的equalizer当且仅当X是态射$f-g:Y\to Z$的核. 由此推出一个Abel范畴有限极限和有限余极限.
(3) 在一个Abel范畴中, 一个态射f是同构, 当且仅当f既单且满.

定义2.4.11. 一个加法范畴中的**链复形**C_*是一个序列$\cdots\to C_{n+1}\xrightarrow{\partial_{n+1}}C_n\xrightarrow{\partial_n}C_{n-1}\xrightarrow{\partial_{n-1}}\cdots$, 使得$\partial_{n-1}\circ\partial_n=0$. 进而可定义链映射和链同伦.

一个Abel范畴中的链复形C_*的p维**同调**定义为诱导态射$\operatorname{Im}\partial_{n+1}\to\operatorname{Ker}\partial_n$的余核, 记作$H_p(C_*)$.

2.5. 正合函子.

定义2.5.1. 一个Abel范畴中的序列$X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$称为在$Y$处**正合**, 如果诱导态射$\operatorname{Coim}f\to Y$是$g$的核. 称一个序列$\cdots\to X_{n+1}\to X_n\to X_{n-1}\to\cdots$**正合**, 若它在每个$X_n$处正合. 一个形如$0\to X\to Y\to Z\to 0$的正合列称为**短正合列**.

例2.5.2. 在一个Abel范畴中, 我们有下列事实.
(1) 一个序列$0\to X\xrightarrow{f}Y$正合, 当且仅当f是单射.
(2) 一个序列$0\to X\xrightarrow{f}Y\to 0$正合, 当且仅当$f$是同构.
(3) 一个序列$0\to X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$正合, 当且仅当$X$是$g$的核.
(4) 对于任意态射$f:X\to Y$, 有正合列$0\to\operatorname{Ker}f\to X\xrightarrow{f}Y\to\operatorname{Coker}f\to 0$.

定义2.5.3. 设范畴$\mathcal{C}$有有限极限(有限余极限). 一个函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$称为**左正合的**(**右正合的**), 如果$F$保持有限极限(有限余极限). 如果$F$既是左正合的又是右正合的, 则称$F$是**正合的**.

例2.5.4. (1) 若局部小范畴$\mathcal{C}$有有限极限, 则可表示函子$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-):\mathcal{C}\to\mathcal{S}et$是左正合的.
(2) 若范畴$\mathcal{C}$有有限极限(有限余极限), 则任一右(左)伴随函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$是左(右)正合的.

命题2.5.5. 设$\mathcal{A},\mathcal{B}$是Abel范畴. 一个函子$F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$是左正合的, 当且仅当下列条件成立:
(1) F是加法函子.
(2) F将$\mathcal{A}$中形如$0\to X\to Y\to Z$的正合列映为$\mathcal{B}$中的正合列$0\to F(X)\to F(Y)\to F(Z)$.

证明. 条件(1)等价于F保持有限乘积. 条件(2)等价于F保持核, 又等价于F保持equalizer. □

习题2.5.6. 设$\mathcal{A},\mathcal{B}$是Abel范畴. $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$是一个函子. 证明下列陈述等价:
(1) F是正合的.
(2) F将$\mathcal{A}$中的短正合列映为$\mathcal{B}$中的短正合列.
(3) F将$\mathcal{A}$中的任意正合列映为$\mathcal{B}$中的正合列.

定义2.5.7. 设$\mathcal{A}$是一个Abel范畴. 我们称一个对象$P\in\mathcal{C}$是**投射的**, 如果函子$\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P,-):\mathcal{A}\to\mathcal{A}bel$是正合的. 称一个对象$I\in\mathcal{C}$是**内射的**, 如果函子$\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(-,I):\mathcal{A}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{A}bel$是正合的.

命题2.5.8. 设$\mathcal{A}$是一个Abel范畴, $P\in\mathcal{A}$. 下列陈述等价:
(1) P是投射的.
(2) 函子$\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P,-):\mathcal{A}\to\mathcal{A}bel$是右正合的.
(3) 函子$\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P,-):\mathcal{A}\to\mathcal{A}bel$保持满射.
(4) 对$\mathcal{A}$中的任意满射$f:X\to Y$及态射$g:P\to Y$, 存在态射$h:P\to X$使得$f\circ h=g$.

证明. (1) $\Leftrightarrow$ (2), 因为$\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P,-)$左正合. (2) $\Rightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4), 显然. (3) $\Rightarrow$ (2), 令$F=\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P,-)$. 则$F$左正合, 因此是加法函子. 任取$\mathcal{A}$中的正合列$X\xrightarrow{f}Y\to Z\to 0$. 有满射$X\to\operatorname{Im}f$和正合列$0\to\operatorname{Im}f\to Y\to Z\to 0$. 因此有满射$F(X)\to F(\operatorname{Im}f)$和正合列$0\to F(\operatorname{Im}f)\to F(Y)\to F(Z)\to 0$. 因此有正合列$F(X)\to F(Y)\to F(Z)\to 0$. □

习题2.5.9. 证明: 在一个Abel范畴中, $X \oplus Y$是投射的, 当且仅当X和Y都是投射的.

习题2.5.10. 设有短正合列的交换图表

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}_X"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "f"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}_Z"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

证明f是同构.

定义2.5.11. Abel范畴中一个短正合列$0 \to X \to Y \to Z \to 0$称为**可裂的**, 如果存在交换图表

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}_X"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}_Z"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "(\mathrm{Id}_X, 0)"] & X \oplus Z \arrow[r, "(0, \mathrm{Id}_Z)"] & Z \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

一个Abel范畴称为**半单的**, 如果每个短正合列可裂.

例2.5.12. $\mathcal{V}ect_k$是半单的, $\mathcal{A}bel$不是半单的.

注2.5.13. 设$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$是Abel范畴间的加法函子. 若$\mathcal{A}$是半单的, 则$F$是正合函子.

命题2.5.14. 若Z是一个投射对象, 则任意短正合列$0 \to X \to Y \to Z \to 0$可裂.

证明. Id_Z可提升为$Z \to Y$. □

命题2.5.15. 设$\mathcal{A}$是一个Abel范畴. 下列陈述等价:

(1) $\mathcal{A}$是半单的.
(2) $\mathcal{A}$的所有对象都是投射的.
(3) $\mathcal{A}$的所有对象都是内射的.

证明. (1) $\Rightarrow$ (2), 每个满射$Y \to Z$可表为$(\mathrm{Id}_Z, 0) : Z \oplus \mathfrak{Z} \to Z$. (2) $\Rightarrow$ (1), 由上一命题立得. (1) $\Leftrightarrow$ (3), 将(1) $\Leftrightarrow$ (2)用于$\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$. □

定义2.5.16. 设$\mathcal{A}$是一个Abel范畴. $\mathcal{A}$的非零对象X称为**单的**, 若X没有非平凡的子对象, 即对于任意单射$f : Y \to X$, f是零态射或同构.

例2.5.17. k是$\mathcal{V}ect_k$唯一的单对象. 当q是素数时, $\mathbb{Z}_q$是$\mathcal{A}bel$的单对象.

命题2.5.18. 设$\mathcal{A}$是一个Abel范畴. 若X, Y是$\mathcal{A}$的单对象, 则每个非零态射$f : X \to Y$都是同构. 特别地, 若X是单对象, 则$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X)$是一个除环; 若$X, Y$是不同构的单对象, 则$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) = 0$.

证明. $\mathrm{Ker}\, f = 0$, 所以f是同构. □

习题2.5.19. 设X是Abel范畴$\mathcal{A}$的单对象. 证明X是$\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$的单对象.

习题2.5.20. 设Abel范畴$\mathcal{A}$单每个对象都是有限个单对象的直和. 证明$\mathcal{A}$是半单的.

3. 半群范畴

在代数学中, 我们有如下环与模的定义:

一个环由一个Abel群A, 一个元素$1 \in A$, 及一个双线性映射$\cdot : A \times A \to A$组成, 使得对任意$a, b, c \in A$, 有等式$1 \cdot a = a = a \cdot 1$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. 一个环同态$f : A \to B$是一个Abel群同态, 使得$f(1) = 1$, $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$.

一个环A的左模由一个Abel群M, 及一个双线性映射$\cdot : A \times M \to M$组成, 使得对任意$a, b \in A$, $x \in M$, 有等式$1 \cdot x = x$, $(a \cdot b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$. 或者等价地, A的左模由一个Abel群M, 及一个环同态$A \to \hom_{\mathbb{Z}}(M, M)$组成. 一个左$A$模同态$f : M \to N$是一个Abel群同态, 使得对任意$a \in A$, $x \in M$, 有等式$f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$.

在范畴学中, 我们以范畴和函子替代Abel群和同态, 可做出类似的定义. 但是范畴之间的函子可以有非平凡的同构, 因此我们不再采用等式, 而用自然同构来处理问题.

3.1. 半群范畴的定义.

定义3.1.1. 一个**半群范畴**$\mathcal{C}$由下列要素组成

(1) 一个范畴$\mathcal{C}$;
(2) 一个对象$\mathbf{1} \in \mathcal{C}$, 称为**单位对象**;
(3) 一个函子$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, 称为**张量积函子**;
(4) 自然的同构$\lambda_X : \mathbf{1} \otimes X \to X$, $\rho_X : X \otimes \mathbf{1} \to X$, $X \in \mathcal{C}$;
(5) 自然的同构$\alpha_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)$, $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, 称为**结合子**;

使得对任意$X, Y, Z, W \in \mathcal{C}$, 下列图表交换

$$\begin{tikzcd}
 & X \otimes Y & \\
(X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y \arrow[ur, "\rho_X \otimes \mathrm{Id}_Y"] \arrow[rr, "\alpha_{X,\mathbf{1},Y}"] & & X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y), \arrow[ul, "\mathrm{Id}_X \otimes \lambda_Y"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \arrow[dr, "\alpha_{X,Y,Z\otimes W}"] & \\
((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W \arrow[ur, "\alpha_{X\otimes Y,Z,W}"] \arrow[d, "\alpha_{X,Y,Z} \otimes \mathrm{Id}_W"'] & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W)) \\
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W \arrow[rr, "\alpha_{X,Y\otimes Z,W}"'] & & X \otimes ((Y \otimes Z)) \otimes W). \arrow[u, "\mathrm{Id}_X \otimes \alpha_{Y,Z,W}"']
\end{tikzcd}$$

注3.1.2. 一个半群范畴称为**严格的**, 如果定义中的自然同构λ, ρ, α都是恒同. 这时定义中的图表自动交换.

例3.1.3. (1) 交换环A的模范畴LMod_A如下构成一个半群范畴: 单位对象A, 通常的张量积运算$\otimes_A$, 典范同构$A \otimes_A X \cong X \cong X \otimes_A A$, $(X \otimes_A Y) \otimes_A Z \cong X \otimes_A (Y \otimes_A Z)$. 特别地, 线性空间范畴$\mathcal{V}ect_k$是一个半群范畴.

(2) 设$\mathcal{C}$有有限乘积. 则$\mathcal{C}$如下构成一个半群范畴: 终对象$*$作为单位对象, 乘积$\times$作为张量积, 典范同构$* \times X \cong X \cong X \times *$, $(X \times Y) \times Z \cong X \times (Y \times Z)$.

(3) 设$\mathcal{M}$是一个范畴, 则$\mathrm{Fun}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$如下构成一个严格半群范畴: 恒同函子$\mathrm{Id}_{\mathcal{M}}$作为单位对象, 函子复合$\circ$作为张量积.

(4) 若$\mathcal{C}$是一个半群范畴, 则$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$在张量积$\otimes^{\mathrm{op}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$下也是一个半群范畴.

(5) 若$\mathcal{C}$是一个半群范畴, 则$\mathcal{C}$在张量积$\otimes^{\mathrm{rev}} : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, $(X, Y) \mapsto Y \otimes X$下是一个半群范畴, 记作$\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$.

(6) 若$\mathcal{C}, \mathcal{D}$是半群范畴, 则乘积$\mathcal{C} \times \mathcal{D}$也是一个半群范畴.

(7) 有限维线性空间范畴Vec是一个半群范畴. 若G是一个群, 则有限维G分次线性空间范畴Vec_G是一个半群范畴. G的有限维模和模同态组成一个半群范畴$\mathrm{Rep}\, G$. 更一般地, 一个Hopf代数H的有限维左模范畴$\mathrm{Rep}\, H$在模的张量积下是一个半群范畴.

(8) 配边范畴Cob_n.

(9) 一个(含单位元的)半群可以看作一个严格半群范畴(只有恒同态射). 特别地, 一个环作为乘法半群可看作一个半群范畴.

定义3.1.4. 设$\mathcal{C}, \mathcal{D}$是两个半群范畴. 一个**半群函子**$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$由下列要素组成

(1) 一个函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$.
(2) 一个同构$\mu : F(\mathbf{1}_\mathcal{C}) \to \mathbf{1}_\mathcal{D}$.
(3) 自然的同构$\nu_{X,Y} : F(X \otimes Y) \to F(X) \otimes F(Y)$, $X, Y \in \mathcal{C}$.

使得对任意$X, Y, Z \in \mathcal{C}$, 下列图表交换

$$\begin{tikzcd}
F(X \otimes \mathbf{1}_\mathcal{C}) \arrow[r, "\nu_{X,\mathbf{1}_\mathcal{C}}"] \arrow[d, "F(\rho_X)"'] & F(X) \otimes F(\mathbf{1}_\mathcal{C}) \arrow[d, "\mathrm{Id}_{F(X)} \otimes \mu"] \\
F(X) & F(X) \otimes \mathbf{1}_\mathcal{D}, \arrow[l, "\rho_{F(X)}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[r, "\nu_{X\otimes Y,Z}"] \arrow[d, "F(\alpha_{X,Y,Z})"'] & F(X \otimes Y) \otimes F(Z) \arrow[r, "\nu_{X,Y} \otimes \mathrm{Id}_{F(Z)}"] & (F(X) \otimes F(Y)) \otimes F(Z) \arrow[d, "\alpha_{F(X),F(Y),F(Z)}"] \\
F(X \otimes (Y \otimes Z)) \arrow[r, "\nu_{X,Y\otimes Z}"] & F(X) \otimes F(Y \otimes Z) \arrow[r, "\mathrm{Id}_{F(X)} \otimes \nu_{Y,Z}"] & F(X) \otimes (F(Y) \otimes F(Z)).
\end{tikzcd}$$

设$F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$是两个半群函子. 一个**半群自然变换**$\xi : F \to G$是一个自然变换, 使得对任意$X, Y \in \mathcal{C}$, 下列图表交换

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1}_\mathcal{D} & \\
F(\mathbf{1}_\mathcal{C}) \arrow[ur, "\mu"] \arrow[rr, "\xi_{\mathbf{1}_\mathcal{C}}"] & & G(\mathbf{1}_\mathcal{C}), \arrow[ul, "\mu"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(X \otimes Y) \arrow[r, "\xi_{X\otimes Y}"] \arrow[d, "\nu_{X,Y}"'] & G(X \otimes Y) \arrow[d, "\nu_{X,Y}"] \\
F(X) \otimes F(Y) \arrow[r, "\xi_X \otimes \xi_Y"] & G(X) \otimes G(Y).
\end{tikzcd}$$

例3.1.5. (1) 如果$\mathcal{C}$是一个半群范畴, 则有半群函子$\mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$, $X \mapsto X \otimes -$.

(2) 设范畴$\mathcal{C}, \mathcal{D}$有有限乘积, 视为半群范畴. 若函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$保持有限乘积, 则$F$是一个半群函子.

(3) 若G是一个有限群, 则遗忘函子$\mathrm{Rep}\, G \to \mathrm{Vec}$和$\mathrm{Vec}_G \to \mathrm{Vec}$都是半群函子. 对于每个群元素$g \in G$, 自然同构$\rho_V(g) : V \to V$定义了半群函子$\mathrm{Rep}\, G \to \mathrm{Vec}$的一个自同构.

习题3.1.6. 设$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$是一个半群函子. 证明$F$是半群等价, 当且仅当$F$是等价.

引理3.1.7. 设$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$是一个半群函子. 下列图表对于$X \in \mathcal{C}$交换

$$\begin{tikzcd}
F(\mathbf{1}_\mathcal{C} \otimes X) \arrow[r, "\nu_{\mathbf{1}_\mathcal{C},X}"] \arrow[d, "F(\lambda_X)"'] & F(\mathbf{1}_\mathcal{C}) \otimes F(X) \arrow[d, "\mu \otimes \mathrm{Id}_{F(X)}"] \\
F(X) & \mathbf{1}_\mathcal{D} \otimes F(X), \arrow[l, "\lambda_{F(X)}"']
\end{tikzcd}$$

证明. 我们有交换图表

$$\begin{tikzcd}
F((Z\otimes \mathbf{1})\otimes X) \arrow[rr, "\nu"] \arrow[dd, "\alpha"'] \arrow[dr, "\rho"] & & F(Z\otimes \mathbf{1})\otimes F(X) \arrow[rr, "\nu"] \arrow[dr, "\rho"] & & (F(Z)\otimes F(\mathbf{1}))\otimes F(X) \arrow[dd, "\alpha"] \arrow[dl, "\rho"'] \\
& F(Z\otimes X) \arrow[rr, "\nu"] & & F(Z)\otimes F(X) & \\
F(Z\otimes(\mathbf{1}\otimes X)) \arrow[rr, "\nu"] \arrow[ur, "\lambda"] & & F(Z)\otimes F(\mathbf{1}\otimes X) \arrow[rr, "\nu"] \arrow[ur, "\lambda"] & & F(Z)\otimes(F(\mathbf{1})\otimes F(X)). \arrow[ul, "\lambda"']
\end{tikzcd}$$

令$Z=\mathbf{1}$, 右下三角形即给出所要的交换图表. □

定理3.1.8. 设$\mathcal{C}$是一个半群范畴. 则对任意对象$X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathcal{C}$, 张量积$X_1 \otimes X_2 \otimes \cdots \otimes X_n$良定义. 具体而言, 任意从$(\cdots((X_1\otimes X_2)\otimes X_3)\otimes\cdots)\otimes X_n$到自身的由$\lambda^{\pm 1}$, $\rho^{\pm 1}$, $\alpha^{\pm 1}$复合得到的同构f, 必然是恒同态射.

证明. 首先, 我们定义一个半群函子$F: \mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{C})$. 对于$X\in\mathcal{C}$, 令$F(X)$为函子$X\otimes - : \mathcal{C}\to\mathcal{C}$. 再赋予$F$一个半群函子结构: $\mu = \lambda_- : F(\mathbf{1}) \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$, $\nu_{X,Y} = \alpha_{X,Y,-} : F(X\otimes Y) \to F(X)\circ F(Y)$. 从定义易见$F$是一个半群函子. 注意到函子$F$是忠实的, 因此只需证明$F(f)$是恒同. 由于半群范畴$\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{C})$是严格的, 可利用定义及引理中的交换图表, 将$F(f)$共轭到一个由$\mu^{\pm 1}$复合的态射. 不失一般性, 假设所有对象$X_i \neq \mathbf{1}$. 则这些$\mu^{\pm 1}$可两两抵消掉, 从而$F(f)$是恒同态射. □

习题3.1.9. 设$\mathcal{C}$是一个半群范畴. 证明: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1},\mathbf{1})$是一个交换半群.

3.2. 半群范畴的模.

定义3.2.1. 设$\mathcal{C}$是一个半群范畴. 一个**左$\mathcal{C}$模**$\mathcal{M}$由下列要素组成

(1) 一个范畴$\mathcal{M}$;
(2) 一个函子$\otimes : \mathcal{C}\times\mathcal{M}\to\mathcal{M}$;
(3) 自然的同构$\lambda_M : \mathbf{1}\otimes M \to M$, $M\in\mathcal{M}$;
(4) 自然的同构$\alpha_{X,Y,M} : (X\otimes Y)\otimes M \to X\otimes(Y\otimes M)$, $X,Y\in\mathcal{C}$, $M\in\mathcal{M}$;

使得对任意$X,Y,Z\in\mathcal{C}$, $M\in\mathcal{M}$, 下列图表交换

$$\begin{tikzcd}
& X\otimes M & \\
(X\otimes\mathbf{1})\otimes M \arrow[rr, "\alpha_{X,\mathbf{1},M}"] \arrow[ur, "\rho_X\otimes\mathrm{Id}_M"] & & X\otimes(\mathbf{1}\otimes M), \arrow[ul, "\mathrm{Id}_X\otimes\lambda_M"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& (X\otimes Y)\otimes(Z\otimes M) \arrow[dr, "\alpha_{X,Y,Z\otimes M}"] & \\
((X\otimes Y)\otimes Z)\otimes M \arrow[ur, "\alpha_{X\otimes Y,Z,M}"] \arrow[d, "\alpha_{X,Y,Z}\otimes\mathrm{Id}_M"'] & & X\otimes(Y\otimes(Z\otimes M)) \\
(X\otimes(Y\otimes Z))\otimes M \arrow[rr, "\alpha_{X,Y\otimes Z,M}"'] & & X\otimes((Y\otimes Z))\otimes M). \arrow[u, "\mathrm{Id}_X\otimes\alpha_{Y,Z,M}"']
\end{tikzcd}$$

设$\mathcal{D}$也是半群范畴. 一个左$\mathcal{D}^{\mathrm{rev}}$模$\mathcal{M}$称为一个**右$\mathcal{D}$模**, 张量积函子一般记作$\otimes : \mathcal{M}\times\mathcal{D}\to\mathcal{M}$. 一个左$\mathcal{C}\times\mathcal{D}^{\mathrm{rev}}$模$\mathcal{M}$称为一个**$\mathcal{C}$-$\mathcal{D}$双模**, 张量积函子一般记作$\otimes : \mathcal{C}\times\mathcal{M}\times\mathcal{D}\to\mathcal{M}$.

定理3.2.2. 设$\mathcal{C}$是一个半群范畴, $\mathcal{M}$是一个左$\mathcal{C}$模. 则对任意对象$X_1, X_2, \ldots, X_n\in\mathcal{C}$及$M\in\mathcal{M}$, 张量积$X_1\otimes X_2\otimes\cdots\otimes X_n\otimes M$良定义. 具体而言, 任意从$(\cdots((X_1\otimes X_2)\otimes X_3)\otimes\cdots)\otimes M$到自身的由$\lambda^{\pm 1}$, $\rho^{\pm 1}$, $\alpha^{\pm 1}$复合得到的同构, 必然是恒同态射.

证明. 我们有半群函子$F:\mathcal{C}\to \mathrm{Fun}(\mathcal{M},\mathcal{M})$, 使得$F(X)=X\otimes - :\mathcal{M}\to\mathcal{M}$. 半群函子结构为: $\mu=\lambda_- : F(\mathbf{1})\to \mathrm{Id}_{\mathcal{M}}$, $\nu_{X,Y}=\alpha_{X,Y,-}:F(X\otimes Y)\to F(X)\circ F(Y)$. 于是函子$X_1\otimes X_2\otimes\cdots\otimes X_n\otimes - :\mathcal{M}\to\mathcal{M}$良定义. □

例3.2.3. (1) 设$\mathcal{C}$是一个半群范畴. 则$\mathcal{C}$是自身的左模和右模, 也是$\mathcal{C}$-$\mathcal{C}$双模.

(2) 设$\mathcal{C}$是一个半群范畴. 给一个左$\mathcal{C}$模, 等价于给一个范畴$\mathcal{M}$和一个半群函子$\mathcal{C}\to \mathrm{Fun}(\mathcal{M},\mathcal{M})$. 由此可知, 若$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$是一个半群函子, 则每个左$\mathcal{D}$模自动成为一个左$\mathcal{C}$模; 特别地, $\mathcal{D}$成为一个$\mathcal{C}$-$\mathcal{C}$双模.

定义3.2.4. 设$\mathcal{M},\mathcal{N}$是半群范畴$\mathcal{C}$的两个左模. 一个**模函子**$F:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$由下列要素组成

(1) 一个函子$F:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$.

(2) 自然的同构$\nu_{X,M}:F(X\otimes M)\to X\otimes F(M)$, $X\in\mathcal{C}$, $M\in\mathcal{M}$.

使得对任意$X,Y\in\mathcal{C}$, $M\in\mathcal{M}$, 下列图表交换

$$\begin{tikzcd}
 & F(M) & \\
F(\mathbf{1}\otimes M) \arrow[ur, "F(\lambda_M)"] \arrow[rr, "\nu_{\mathbf{1},M}"] & & \mathbf{1}\otimes F(M), \arrow[ul, "\lambda_{F(M)}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & X\otimes F(Y\otimes M) \arrow[dr, "\mathrm{Id}_X\otimes\nu_{Y,M}"] & \\
F(X\otimes Y\otimes M) \arrow[ur, "\nu_{X,Y\otimes M}"] \arrow[rr, "\nu_{X\otimes Y,M}"] & & X\otimes Y\otimes F(M).
\end{tikzcd}$$

设$F,G:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$是两个模函子. 一个**模自然变换**$\xi:F\to G$是一个自然变换, 使得对任意$X\in\mathcal{C}$, $M\in\mathcal{M}$, 下列图表交换

$$\begin{tikzcd}
F(X\otimes M) \arrow[r, "\xi_{X\otimes M}"] \arrow[d, "\nu_{X,M}"'] & G(X\otimes M) \arrow[d, "\nu_{X,M}"] \\
X\otimes F(M) \arrow[r, "\mathrm{Id}_X\otimes\xi_M"] & X\otimes G(M).
\end{tikzcd}$$

若$\mathcal{M},\mathcal{N}$是两个左$\mathcal{C}$模(右$\mathcal{D}$模, $\mathcal{C}$-$\mathcal{D}$双模), 则全体模函子$F:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$及模自然变换构成一个范畴, 记作$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ ($\mathrm{Fun}_{\mathcal{D}^{\mathrm{rev}}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$, $\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}|\mathcal{D}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$).

例3.2.5. (1) 若$\mathcal{M},\mathcal{N}$是半群范畴$\mathcal{C}$的左模, 则$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{M})$是半群范畴, 并且$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$是一个$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{N},\mathcal{N})$-$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{M})$双模.

(2) 给一个$\mathcal{C}$-$\mathcal{D}$双模等价于给一个左$\mathcal{C}$模$\mathcal{M}$和一个半群函子$\mathcal{D}^{\mathrm{rev}}\to\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{M})$.

(3) 设G是一个有限群. 有半群函子$\mathrm{Vec}_G\to\mathrm{Fun}_{\mathrm{Rep}_G}(\mathrm{Vec},\mathrm{Vec})$, 因而$\mathrm{Vec}$是$\mathrm{Vec}_G$-$\mathrm{Rep}\,G$双模, 且有半群函子$\mathrm{Rep}_G\to\mathrm{Fun}_{\mathrm{Vec}_G}(\mathrm{Vec},\mathrm{Vec})$. 事实上这两个半群函子都是等价.

习题3.2.6. 设$F:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$是一个左$\mathcal{C}$模函子. 证明$F$是左$\mathcal{C}$模等价, 当且仅当$F$是范畴等价.

习题3.2.7. 证明: 任何一个半群范畴$\mathcal{C}$都等价于一个严格半群范畴. [提示: 证明半群等价$\mathcal{C}\simeq\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}}(\mathcal{C},\mathcal{C})$.]

3.3. **辫半群范畴和对称半群范畴.** **在**代数学中, 环有交换性及中心的概型. 我们有如下的观察:

一个环A是交换的, 当且仅当乘法$\cdot:A\otimes A\to A$是一个环同态.

设A是一个环. 则A的中心$Z(A)$是一个交换环, 并且乘法$\cdot:Z(A)\otimes A\to A$是一个环同态. 我们有交换图表

$$\begin{tikzcd}
 & Z(A)\otimes A \arrow[dr, "\cdot"] & \\
A \arrow[ur, "1\otimes\mathrm{Id}_A"] \arrow[rr, "\mathrm{Id}_A"] & & A.
\end{tikzcd}$$

A的中心$Z(A)$满足如下泛性质. 若B是一个环, $f:B\otimes A\to A$是一个环同态, 使得下列图表交换

$$\begin{tikzcd}
 & B\otimes A \arrow[dr, "f"] & \\
A \arrow[ur, "1\otimes\mathrm{Id}_A"] \arrow[rr, "\mathrm{Id}_A"] & & A,
\end{tikzcd}$$

则存在唯一的环同态$g : B \to Z(A)$, 使得下列图表交换

$$\begin{tikzcd}
 & Z(A) \otimes A \arrow[dr] & \\
B \otimes A \arrow[ur, "g\otimes \mathrm{Id}_A"] \arrow[rr, "f"] & & A.
\end{tikzcd}$$

由于这个泛性质唯一地决定了$Z(A)$, 因此它可作为中心的定义.

作为推论, 我们有典范的环同构$Z(A) \cong \mathrm{Hom}_{A|A}(A, A)$, 因为右边也满足中心的泛性质.

在范畴学中, 我们同样可以讨论半群范畴的交换性和中心. 不过这时会发现半群范畴的交换性有两个不同层次. (事实上高阶半群范畴的交换性会有更多的层次.)

定义3.3.1. 一个**辫半群范畴**$\mathcal{C}$由下列要素组成

(1) 一个半群范畴$\mathcal{C}$;

(2) 自然的同构$\beta_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X,\ X, Y \in \mathcal{C}$, 称为**辫结构**;

使得对任意$X, Y, Z \in \mathcal{C}$, 下列图表交换:

$$\begin{tikzcd}
 & Y \otimes X \otimes Z \arrow[dr, "\mathrm{Id}_Y \otimes \beta_{X,Z}"] & \\
X \otimes Y \otimes Z \arrow[ur, "\beta_{X,Y}\otimes \mathrm{Id}_Z"] \arrow[rr, "\beta_{X,Y\otimes Z}"] & & Y \otimes Z \otimes X
\end{tikzcd}$$

设$\mathcal{C}, \mathcal{D}$是两个辫半群范畴. 一个**辫半群函子**$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$是一个半群函子, 使得对任意$X, Y \in \mathcal{C}$, 下列图表交换

$$\begin{tikzcd}
F(X \otimes Y) \arrow[r, "F(\beta_{X,Y})"] \arrow[d, "\nu_{X,Y}"'] & F(Y \otimes X) \arrow[d, "\nu_{Y,X}"] \\
F(X) \otimes F(Y) \arrow[r, "\beta_{F(X),F(Y)}"] & F(Y) \otimes F(X).
\end{tikzcd}$$

命题3.3.2. 在一个辫半群范畴$\mathcal{C}$中, 下列图表交换:

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
\mathbf{1} \otimes X \arrow[ur, "\lambda_X"] & & X \otimes \mathbf{1}, \arrow[ul, "\rho_X"'] \arrow[ll, "\beta_{X,\mathbf{1}}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & X & \\
\mathbf{1} \otimes X \arrow[ur, "\lambda_X"] \arrow[rr, "\beta_{\mathbf{1},X}"] & & X \otimes \mathbf{1}. \arrow[ul, "\rho_X"']
\end{tikzcd}$$

证明. 假设$\mathcal{C}$是严格的. 由交换图表

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} \otimes X \otimes \mathbf{1} \arrow[dr, "\mathrm{Id}_{\mathbf{1}} \otimes \beta_{X,\mathbf{1}}"] & \\
X \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \arrow[ur, "\beta_{X,\mathbf{1}}\otimes \mathrm{Id}_{\mathbf{1}}"] \arrow[rr, "\beta_{X,\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}}"] & & \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes X
\end{tikzcd}$$

得$\beta_{X,\mathbf{1}} = \mathrm{Id}_X$. 类似地$\beta_{\mathbf{1},X} = \mathrm{Id}_X$. □

定义3.3.3. 一个辫半群范畴$\mathcal{C}$称为**对称半群范畴**, 若对任意$X, Y \in \mathcal{C}$, $\beta_{X,Y} = (\beta_{Y,X})^{-1}$. 设$\mathcal{C}, \mathcal{D}$是两个对称半群范畴. 一个**对称半群函子**$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$是一个辫半群函子.

注3.3.4. 设$\mathcal{C}$是一个辫半群范畴, $X \in \mathcal{C}$. 则$X^{\otimes n}$上有一个n股辫群的作用. 如果$\mathcal{C}$是对称的, 则$X^{\otimes n}$上有一个n元素置换群的作用.

例3.3.5. (1) 设$\mathcal{C}$是一个辫半群范畴. 则$\mathcal{C}$在辫结构$\bar{\beta}_{X,Y} = (\beta_{Y,X})^{-1}$下是也是一个辫半群范畴, 记作$\bar{\mathcal{C}}$.

(2) 设G是一个有限群, 则$\mathrm{Rep}\, G$是一个对称半群范畴. 若G是有限Abel群, 则Vec_G也是一个对称半群范畴. 更一般地, 若H是一个余对称的Hopf代数, 则$\mathrm{Rep}\, H$是一个对称半群范畴.

(3) 若$\mathcal{C}$是一个辫半群范畴, 则有完全忠实的辫半群函子$\mathcal{C} \to \mathfrak{Z}(\mathcal{C})$和$\bar{\mathcal{C}} \to \mathfrak{Z}(\mathcal{C})$.

注3.3.6. 设$\mathcal{C}$是一个半群范畴. 则$\mathcal{C}$的辫结构与$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$的半群函子结构一一对应. 事实上, 一个辫结构$\beta$诱导了$\otimes$的一个半群函子结构$\mathrm{Id}_X \otimes \beta_{Y,X'} \otimes \mathrm{Id}_{Y'} : (X \otimes Y) \otimes (X' \otimes Y') \to (X \otimes X') \otimes (Y \otimes Y')$. 反之, $\otimes$的一个半群函子结构给出一个辫结构$X \otimes Y \cong (\mathbf{1} \otimes X) \otimes (Y \otimes \mathbf{1}) \to (\mathbf{1} \otimes Y) \otimes (X \otimes \mathbf{1}) \cong Y \otimes X$. 这说明, 赋予$\mathcal{C}$一个辫结构等价于赋予$\otimes$一个半群函子结构.

习题3.3.7. 设$\mathcal{C}$是一个辫半群范畴, 从而$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$是一个半群函子. 证明: $\mathcal{C}$是对称的, 当且仅当$\otimes$是一个辫半群函子.

3.4. **Drinfeld中心.**

构造3.4.1. 设$\mathcal{C}$是一个半群范畴. 一个对象$X \in \mathcal{C}$上的**半辫结构**是一个自然同构$b_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$, $Y \in \mathcal{C}$, 使得对任意$Y, Z \in \mathcal{C}$下列图表交换:

$$\begin{tikzcd} & Y \otimes X \otimes Z \arrow[dr, "\mathrm{Id}_Y \otimes b_{X,Z}"] & \\ X \otimes Y \otimes Z \arrow[ur, "b_{X,Y} \otimes \mathrm{Id}_Z"] \arrow[rr, "b_{X,Y \otimes Z}"] & & Y \otimes Z \otimes X \end{tikzcd}$$

我们如下构造一个辫半群范畴$\mathfrak{Z}(\mathcal{C})$, 称为$\mathcal{C}$的**Drinfeld中心**. $\mathfrak{Z}(\mathcal{C})$的一个对象是一个对$(X, b_{X,-})$, 其中$X$是$\mathcal{C}$中的对象, $b_{X,-}$是X上的一个半辫结构. 一个态射$(X, b_{X,-}) \to (Y, b_{Y,-})$是一个$\mathcal{C}$中的态射$f : X \to Y$, 使得下列图表对于$Z \in \mathcal{C}$交换

$$\begin{tikzcd} X \otimes Z \arrow[r, "b_{X,Z}"] \arrow[d, "f \otimes \mathrm{Id}_Z"'] & Z \otimes X \arrow[d, "\mathrm{Id}_Z \otimes f"] \\ Y \otimes Z \arrow[r, "b_{Y,Z}"] & Z \otimes Y. \end{tikzcd}$$

张量积$(X, b_{X,-}) \otimes (Y, b_{Y,-})$定义为$(X \otimes Y, b_{X \otimes Y,-})$, 其中$b_{X \otimes Y, Z}$是复合同构$X \otimes Y \otimes Z \xrightarrow{\mathrm{Id}_X \otimes b_{Y,Z}} X \otimes Z \otimes Y \xrightarrow{b_{X,Z} \otimes \mathrm{Id}_Y} Z \otimes X \otimes Y$. 单位对象为$(\mathbf{1}, \rho^{-1} \circ \lambda)$. 辫结构定义为$\beta_{(X,b_{X,-}),(Y,b_{Y,-})} = b_{X,Y}$.

注3.4.2. 若$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$是半群范畴, 则$\mathfrak{Z}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = \mathfrak{Z}(\mathcal{C}) \times \mathfrak{Z}(\mathcal{D})$.

注3.4.3. 一个对象$X \in \mathcal{C}$上可以有多个不同的半辫结构. 因此$\mathfrak{Z}(\mathcal{C})$一般不是$\mathcal{C}$的子范畴. 另一方面, 如果$X$有半辫结构, 则必然有$X \otimes Y \cong Y \otimes X$. 所以一般的$X$没有半辫结构.

例3.4.4. 设A是一个环, 看作一个半群范畴(只有恒同态射). 则$Z(A)$就是A的中心.

例3.4.5. $\mathfrak{Z}(\mathrm{Vec}) \simeq \mathrm{Vec}$. 事实上, Vec的每个对象都是单位对象的直和, 并且它的张量积关于每个变量保持直和, 所以每个对象有唯一的半辫结构. 类似地, 若A是交换环, 则LMod_A由单位对象在小余极限下生成, 并且张量积关于每个变量保持小余极限, 所以$\mathfrak{Z}(\mathrm{LMod}_A) \simeq \mathrm{LMod}_A$.

注3.4.6. 设$\mathcal{C}$是一个半群范畴. 有典范的辫半群等价$\overline{\mathfrak{Z}(\mathcal{C})} \simeq \mathfrak{Z}(\mathcal{C}^{\mathrm{rev}})$, $(X, b_{X,-}) \mapsto (X, b_{X,-}^{-1})$.

习题3.4.7. 设$\mathcal{C}$是一个半群范畴. 证明有典范的半群等价$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}|\mathcal{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{C}) \simeq \mathfrak{Z}(\mathcal{C})$.

定理3.4.8. 设$\mathcal{C}$是一个半群范畴. (1) $\mathcal{C}$的张量积诱导了一个半群函子$\otimes : \mathfrak{Z}(\mathcal{C}) \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, 并且下列半群范畴的图表在同构意义下交换:

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{Z}(\mathcal{C}) \times \mathcal{C} \arrow[dr, "\otimes"] & \\ \mathcal{C} \arrow[ur, "\mathbf{1} \times \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}"] \arrow[rr, "\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}"] & & \mathcal{C}. \end{tikzcd}$$

(2) 对任意半群范畴$\mathcal{D}$和半群函子$\odot:\mathcal{D}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$, 若下列半群范畴的图表在同构意义下交换

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{D}\times\mathcal{C} \arrow[dr, "\odot"] & \\ \mathcal{C} \arrow[ur, "\mathbf{1}_{\mathcal{D}}\times\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}"] \arrow[rr, "\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}"] & & \mathcal{C}, \end{tikzcd}$$

则存在半群函子$G:\mathcal{D}\to\mathfrak{Z}(\mathcal{C})$使得下列图表在同构意义下交换

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{Z}(\mathcal{C})\times\mathcal{C} \arrow[dr, "\otimes"] & \\ \mathcal{D}\times\mathcal{C} \arrow[ur, "G\times\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}"] \arrow[rr, "\odot"] & & \mathcal{C}, \end{tikzcd}$$

并且G在同构下唯一.

证明. (1) 自然同构$(Z\otimes Z')\otimes(X\otimes X')\xrightarrow{\mathrm{Id}_Z\otimes b_{Z',X}\otimes\mathrm{Id}_{X'}}(Z\otimes X)\otimes(Z'\otimes X')$, $Z,Z'\in\mathfrak{Z}(\mathcal{C})$, $X,X'\in\mathcal{C}$, 将函子$\otimes:\mathfrak{Z}(\mathcal{C})\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$提升为一个半群函子.

(2) 我们有半群函子$G:\mathcal{D}\to\mathfrak{Z}(\mathcal{C})$, $Y\mapsto(Y\odot\mathbf{1},b_{Y\odot\mathbf{1},-})$, 其中$b_{Y\odot\mathbf{1},X}$是复合同构$(Y\odot\mathbf{1})\otimes X\cong(Y\odot\mathbf{1})\otimes(\mathbf{1}\odot X)\cong Y\odot X\cong(\mathbf{1}\odot X)\otimes(Y\odot\mathbf{1})\cong X\otimes(Y\odot\mathbf{1})$. 还有半群自然同构$G(Y)\otimes X=(Y\odot\mathbf{1})\otimes X\cong Y\odot X$.

假设有半群函子$G':\mathcal{D}\to\mathfrak{Z}(\mathcal{C})$和半群自然同构$G'(Y)\otimes X\cong Y\odot X$. 则有半群自然同构$G'(Y)\cong G'(Y)\otimes\mathbf{1}\cong Y\odot\mathbf{1}\cong G(Y)$. □

定义3.4.9. 设$\mathcal{C}$是一个辫半群范畴. 一个**$\mathcal{C}$上的半群范畴**是一个半群范畴$\mathcal{D}$及一个辫半群函子$\mathcal{C}\to\mathfrak{Z}(\mathcal{D})$.

例3.4.10. (1) 一个半群范畴$\mathcal{C}$是$\mathfrak{Z}(\mathcal{C})$上的半群范畴. (2) 设$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$是半群范畴, $\mathcal{M}$是一个$\mathcal{C}$-$\mathcal{D}$双模. 则$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}|\mathcal{D}}(\mathcal{M},\mathcal{M})$是$\overline{\mathfrak{Z}(\mathcal{C})}\times\mathfrak{Z}(\mathcal{D})$上的半群范畴.

3.5. **Müger中心.**

定义3.5.1. 设$\mathcal{C}$是一个辫半群范畴. $\mathcal{C}$的一个对象X称为**透明的**, 若对任意$Y\in\mathcal{C}$, $\beta_{X,Y}=(\beta_{Y,X})^{-1}$. 我们将$\mathcal{C}$的透明对象组成的完全子范畴, 记作$\mathcal{C}'$或$\mathfrak{Z}_2(\mathcal{C})$, 称为$\mathcal{C}$的**Müger中心**.

习题3.5.2. 证明: (1) 若$X,Y\in\mathcal{C}$透明, 则$X\otimes Y$也透明, 从而$\mathfrak{Z}_2(\mathcal{C})$是辫半群范畴. (2) 辫半群范畴$\mathfrak{Z}_2(\mathcal{C})$是对称的.

定理3.5.3. 设$\mathcal{C}$是一个辫半群范畴. (1) $\mathcal{C}$的张量积诱导了一个辫半群函子$\otimes:\mathfrak{Z}_2(\mathcal{C})\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$, 并且下列辫半群范畴的图表在同构意义下交换:

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{Z}_2(\mathcal{C})\times\mathcal{C} \arrow[dr, "\otimes"] & \\ \mathcal{C} \arrow[ur, "\mathbf{1}\times\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}"] \arrow[rr, "\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}"] & & \mathcal{C}. \end{tikzcd}$$

(2) 对任意辫半群范畴$\mathcal{D}$和辫半群函子$\odot:\mathcal{D}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$, 若下列辫半群范畴的图表在同构意义下交换

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{D}\times\mathcal{C} \arrow[dr, "\odot"] & \\ \mathcal{C} \arrow[ur, "\mathbf{1}_{\mathcal{D}}\times\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}"] \arrow[rr, "\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}"] & & \mathcal{C}, \end{tikzcd}$$

则存在辫半群函子$G:\mathcal{D}\to\mathfrak{Z}_2(\mathcal{C})$使得下列图表在同构意义下交换

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{Z}_2(\mathcal{C})\times\mathcal{C} \arrow[dr, "\otimes"] & \\ \mathcal{D}\times\mathcal{C} \arrow[ur, "G\times\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}"] \arrow[rr, "\odot"] & & \mathcal{C}, \end{tikzcd}$$

并且G在同构下唯一.

证明. (1) 显然. (2) 我们有辫半群函子$G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$, $Y\mapsto Y\odot\mathbf{1}$. 由交换图表

$$\begin{tikzcd} (Y\otimes\mathbf{1})\odot(\mathbf{1}\otimes X) \arrow[r, "\beta_{Y,\mathbf{1}}\odot\beta_{\mathbf{1},X}"] \arrow[d, "\sim"] & (\mathbf{1}\otimes Y)\odot(X\otimes\mathbf{1}) \arrow[r, "\beta_{\mathbf{1},Y}\odot\beta_{X,\mathbf{1}}"] \arrow[d, "\sim"] & (Y\otimes\mathbf{1})\odot(\mathbf{1}\otimes X) \arrow[d, "\sim"] \\ (Y\odot\mathbf{1})\otimes(\mathbf{1}\odot X) \arrow[r, "\beta_{Y\odot\mathbf{1},\mathbf{1}\odot X}"] & (\mathbf{1}\odot X)\otimes(Y\odot\mathbf{1}) \arrow[r, "\beta_{\mathbf{1}\odot X,Y\odot\mathbf{1}}"] & (Y\odot\mathbf{1})\otimes(\mathbf{1}\odot X) \end{tikzcd}$$

可知G的像落在$\mathfrak{Z}_2(\mathcal{C})$中. 还有半群自然同构$G(Y)\otimes X=(Y\odot\mathbf{1})\otimes X\cong Y\odot X$.

假设有辫半群函子$G':\mathcal{D}\to\mathfrak{Z}_2(\mathcal{C})$和半群自然同构$G'(Y)\otimes X\cong Y\odot X$. 则有半群自然同构$G'(Y)\cong G'(Y)\otimes\mathbf{1}\cong Y\odot\mathbf{1}\cong G(Y)$. □

定义3.5.4. 设$\mathcal{C}$是一个对称半群范畴. 一个$\mathcal{C}$上**的辫半群范畴**是一个辫半群范畴$\mathcal{D}$及一个辫半群函子$\mathcal{C}\to\mathfrak{Z}_2(\mathcal{D})$.

3.6. **对偶.**

定义3.6.1. 设$\mathcal{C}$是一个半群范畴, $X, Y \in \mathcal{C}$是两个对象. 称X是Y的**左对偶**, Y是X的**右对偶**, 如果存在态射$u : \mathbf{1} \to Y \otimes X$和$v : X \otimes Y \to \mathbf{1}$, 使得下列复合态射是恒同

$$X \cong X \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\mathrm{Id}_X \otimes u} X \otimes Y \otimes X \xrightarrow{v \otimes \mathrm{Id}_X} \mathbf{1} \otimes X \cong X,$$

$$Y \cong \mathbf{1} \otimes Y \xrightarrow{u \otimes \mathrm{Id}_Y} Y \otimes X \otimes Y \xrightarrow{\mathrm{Id}_Y \otimes v} Y \otimes \mathbf{1} \cong Y.$$

我们将Y记作X^R, 将X记作Y^L. 称$\mathcal{C}$是**刚性的**, 如果每个对象都有左对偶和右对偶.

注3.6.2. 设$\mathcal{C}$是对称半群范畴. 若Y是X的右对偶, 则Y也是X的左对偶.

例3.6.3. (1) 设$\mathcal{M}$是一个范畴. 半群范畴$\mathrm{Fun}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$的一个对象的左对偶等价于一个左伴随函子, 右对偶等价于一个右伴随函子.

(2) 线性空间范畴$\mathcal{V}ect_k$的一个对象V有对偶等价于V是一个有限维线性空间. 特别地, 有限维线性空间组成的完全子范畴Vec有对偶. 事实上, 若V有对偶W, $u : k \to V \otimes W$将1映为$\sum v_i \otimes w_i$, 则复合映射$V \xrightarrow{u \otimes \mathrm{Id}_V} V \otimes W \otimes V \xrightarrow{\mathrm{Id}_V \otimes v} V$将$x$映为$\sum v(w_i \otimes x) v_i$. 因此$V$由$v_i$线性张出.

(3) 若G是一个有限群, 则半群范畴$\mathrm{Rep}\, G$和Vec_G是刚性的. 更一般地, 若H是一个Hopf代数, 则半群范畴$\mathrm{Rep}\, H$是刚性的.

(4) 配边范畴Cob_n是刚性的. 一个对象M的对偶是$\bar{M}$.

命题3.6.4. 设$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$是一个半群函子. 若$X \in \mathcal{C}$是$Y \in \mathcal{C}$的左对偶, 则$F(X)$是$F(Y)$的左对偶.

证明. 由定义立得. □

命题3.6.5. 设$\mathcal{C}$是一个半群范畴, $\mathcal{M}$是一个左$\mathcal{C}$模. 若X有左对偶, 则函子$X^L \otimes - : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$是$X \otimes -$的左伴随.

证明. 考虑半群函子$\mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$, $X \mapsto X \otimes -$. 应用命题3.6.4. □

注3.6.6. 设$\mathcal{C}$是一个刚性的半群范畴. 则函子$X \otimes - : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$有左伴随和右伴随, 因此保持所有极限和余极限. 特别地, 若$\mathcal{C}$是Abel范畴, 则张量积$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$关于每个变量都是正合的.

推论3.6.7. 设$\mathcal{C}$是一个半群范畴. 若X有左对偶X^L, 则X^L在典范同构下唯一. 特别地, $(X^L)^R$与X典范同构.

注3.6.8. 设$\mathcal{C}$是一个刚性的半群范畴, $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$是一个左$\mathcal{C}$模函子. 若函子$F$有右伴随$G$, 则$G$也是一个左$\mathcal{C}$模函子, 其中同构$G(X \otimes N) \cong X \otimes G(N)$由$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(M, G(X \otimes N)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{N}}(F(M), X \otimes N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{N}}(X^L \otimes F(M), N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{N}}(F(X^L \otimes M), N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X^L \otimes M, G(N)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(M, X \otimes G(N))$所诱导.

构造3.6.9. 设$\mathcal{C}$是一个刚性的半群范畴. 有函子$\delta^L : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, $X \mapsto X^L$, 将态射$f : X \to Y$映为$f^L : Y^L \xrightarrow{\mathrm{Id}_{Y^L} \otimes u} Y^L \otimes X \otimes X^L \xrightarrow{\mathrm{Id}_{Y^L} \otimes f \otimes \mathrm{Id}_{X^L}} Y^L \otimes Y \otimes X^L \xrightarrow{v \otimes \mathrm{Id}_{X^L}} X^L$. 类似地有函子$\delta^R : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, $X \mapsto X^R$.

命题3.6.10. 设$\mathcal{C}$是一个刚性的半群范畴. 有半群等价$\delta^L : \mathcal{C}^{\mathrm{rev}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, $X \mapsto X^L$和$\delta^R : \mathcal{C}^{\mathrm{rev}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, $X \mapsto X^R$.

证明. 函子δ^L与δ^R互逆. $(X \otimes Y)^L$与$Y^L \otimes X^L$都是$X \otimes Y$的左对偶, 诱导的典范同构$(X \otimes Y)^L \cong Y^L \otimes X^L$将$\delta^L$提升为一个半群函子. □

命题3.6.11. 设$\mathcal{C}$是一个刚性的半群范畴, 其中$\mathcal{C}$是Abel范畴. 则对任意对象X和投射对象P, $X \otimes P$是投射对象.

证明. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes P, -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, X^R \otimes -)$正合. □

命题3.6.12. 设$\mathcal{C}$是一个刚性的半群范畴, 其中$\mathcal{C}$是Abel范畴. 下列陈述等价:

(1) $\mathcal{C}$是半单的.

(2) $\mathbf{1}$是投射的.
(3) $\mathbf{1}$是内射的.

证明. (1) $\Rightarrow$ (2), 显然. (2) $\Rightarrow$ (1), 由上一命题立得. (1) $\Leftrightarrow$ (3), 将(1) $\Leftrightarrow$ (2)用于$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. $\square$

习题3.6.13. 证明: (1) 若半群范畴$\mathcal{C}$是刚性的, 则Drinfeld中心$\mathfrak{Z}(\mathcal{C})$亦然. (2) 若辫半群范畴$\mathcal{C}$是刚性的, 则Müger中心$\mathfrak{Z}_2(\mathcal{C})$亦然.

4. 半群范畴中的代数

4.1. 结合代数.

定义4.1.1. 设$\mathcal{C}$是一个半群范畴. $\mathcal{C}$中的一个**代数**A由下列要素组成

(1) 一个对象$A \in \mathcal{C}$;
(2) 一个态射$u : \mathbf{1} \to A$, 称为**单位**;
(3) 一个态射$m : A \otimes A \to A$, 称为**乘法**;

使得下列图表交换

$$\begin{tikzcd} & A\otimes A \arrow[dr, "m"] & \\ \mathbf{1}\otimes A \arrow[ur, "u\otimes \mathrm{Id}_A"] \arrow[rr, "\lambda_A"] & & A, \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & A\otimes A \arrow[dr, "m"] & \\ A\otimes \mathbf{1} \arrow[ur, "\mathrm{Id}_A\otimes u"] \arrow[rr, "\rho_A"] & & A, \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} A\otimes A\otimes A \arrow[r, "\mathrm{Id}_A\otimes m"] \arrow[d, "m\otimes \mathrm{Id}_A"'] & A\otimes A \arrow[d, "m"] \\ A\otimes A \arrow[r, "m"] & A. \end{tikzcd}$$

设A, B是$\mathcal{C}$中的两个代数. 一个**代数同态**$f : A \to B$是一个态射, 使得下列图表交换

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{1} \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "u"] & \\ A \arrow[rr, "f"] & & B, \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "m"'] & B\otimes B \arrow[d, "m"] \\ A \arrow[r, "f"] & B. \end{tikzcd}$$

$\mathcal{C}$中的代数和代数同态构成一个范畴, 记作$\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$. $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$中的一个代数称为$\mathcal{C}$中的一个**余代数**.

注4.1.2. (1) 半群范畴$\mathcal{C}$中的每个代数A都可看作是$\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$中的代数, 记作$A^{\mathrm{rev}}$, 因为一个态射$m : A \otimes A \to A$等价于一个态射$m : A \otimes^{\mathrm{rev}} A \to A$. 于是$\mathrm{Alg}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Alg}(\mathcal{C}^{\mathrm{rev}})$.

(2) 若$\mathcal{C}, \mathcal{D}$是半群范畴, 则$\mathrm{Alg}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = \mathrm{Alg}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Alg}(\mathcal{D})$.

(3) 若半群范畴$\mathcal{C}$有所有小(或者有限)极限, 则$\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$也有所有小(或者有限)极限, 并且遗忘函子$For : \mathrm{Alg}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$保持小(或者有限)极限.

(4) 若半群范畴$\mathcal{C}$有小正向极限, 并且$\mathcal{C}$的张量积分别关于每个变量保持小正向极限, 则$\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$也有小正向极限, 并且遗忘函子$For : \mathrm{Alg}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$保持小正向极限.

(5) 半群范畴$\mathcal{C}$的单位对象$\mathbf{1}$本身是一个代数, 它是$\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$的始对象, 称为**平凡代数**.

习题4.1.3. 证明: 若半群范畴$\mathcal{C}$中的一个代数A作为对象同构于$\mathbf{1}$, 则A作为代数同构于$\mathbf{1}$.

例4.1.4. (1) 赋予$\mathcal{S}et$乘积半群范畴结构. 则$\mathrm{Alg}(\mathcal{S}et)$是由通常的半群和半群同态组成的范畴.

(2) 赋予$\mathcal{A}bel$通常的半群范畴结构. 则$\mathrm{Alg}(\mathcal{A}bel) \simeq \mathcal{R}ing$.

(3) 全体范畴及函子的同构类组成一个范畴$\mathcal{C}at$, 它在范畴乘积下构成一个半群范畴. 每个半群范畴都是其中的代数. (反之不然, 正确的做法是保留函子同构将$\mathcal{C}at$做成一个二阶范畴.)

定义4.1.5. 设$\mathcal{C}$是半群范畴, $\mathcal{M}$是一个左$\mathcal{C}$模, A是$\mathcal{C}$中的一个代数. $\mathcal{M}$中一个的**左A模**M由下列要素组成

(1) 一个对象$M \in \mathcal{M}$;
(2) 一个态射$m : A \otimes M \to M$;

使得下列图表交换

$$\begin{tikzcd} & A\otimes M \arrow[dr, "m"] & \\ \mathbf{1}\otimes M \arrow[ur, "u\otimes \mathrm{Id}_M"] \arrow[rr, "\lambda_M"] & & M, \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} A\otimes A\otimes M \arrow[r, "\mathrm{Id}_A\otimes m"] \arrow[d, "m\otimes \mathrm{Id}_M"'] & A\otimes M \arrow[d, "m"] \\ A\otimes M \arrow[r, "m"] & M. \end{tikzcd}$$

设M,N是两个$\mathcal{M}$中的左A模. 一个**模同态**$f:M\to N$是一个态射, 使得下列图表交换

$$\begin{tikzcd} A\otimes M \arrow[r, "\mathrm{Id}_A\otimes f"] \arrow[d, "m"'] & A\otimes N \arrow[d, "m"] \\ M \arrow[r, "f"] & N. \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}$中的左A模及模同态构成一个范畴, 记作$\mathrm{LMod}_A(\mathcal{M})$或${}_A\mathcal{M}$.

设$\mathcal{D}$是半群范畴, $\mathcal{M}$是一个右$\mathcal{D}$模, B是$\mathcal{D}$中的一个代数. $\mathcal{M}$中的左B^{rev}模范畴记作$\mathrm{RMod}_B(\mathcal{M})$或$\mathcal{M}_B$, 其中的对象也称为一个**右$B$模**.

设$\mathcal{C},\mathcal{D}$是半群范畴, $\mathcal{M}$是一个$\mathcal{C}$-$\mathcal{D}$双模, (A,B)是$\mathcal{C}\times\mathcal{D}$中的一个代数. $\mathcal{M}$中的左(A,B^{rev})模范畴记作$\mathrm{BMod}_{A|B}(\mathcal{M})$或${}_A\mathcal{M}_B$, 其中的对象也称为一个**$A$-$B$双模**.

例4.1.6. 设A,B是两个环. 则$\mathrm{LMod}_A(\mathcal{A}bel)$, $\mathrm{RMod}_B(\mathcal{A}bel)$, $\mathrm{BMod}_{A|B}(\mathcal{A}bel)$分别是通常的左$A$模范畴, 右$B$模范畴, A-B双模范畴.

注4.1.7. (1) ${}_{\mathbf{1}}\mathcal{M}\simeq\mathcal{M}$.

(2) 若$\mathcal{M}$是一个$\mathcal{C}$-$\mathcal{D}$双模, 则${}_A\mathcal{M}$是一个右$\mathcal{D}$模. 特别地, ${}_A\mathcal{C}$是一个右$\mathcal{C}$模.

(3) 设$M\in\mathcal{C}_A$, $N\in{}_A\mathcal{M}$. 我们以$M\otimes_A N$表示图表$M\otimes A\otimes N\rightrightarrows M\otimes N$的coequalizer. 我们有$A\otimes_A N\cong N$.

(4) 设$\mathcal{C}$有coequalizer, 并且张量积关于每个变量都保持coequalizer. 则${}_A\mathcal{C}_A$是一个半群范畴, 张量积为$\otimes_A$. 并且有辫半群函子$\mathfrak{Z}(\mathcal{C})\to\mathfrak{Z}({}_A\mathcal{C}_A)$, $X\mapsto X\otimes A$. $\mathcal{C}_A$是一个$\mathcal{C}$-${}_A\mathcal{C}_A$双模, ${}_A\mathcal{C}$是一个${}_A\mathcal{C}_A$-$\mathcal{C}$双模.

(5) 设$f:A\to B$是$\mathcal{C}$中的一个代数同态, $\mathcal{M}$是一个左$\mathcal{C}$模, $M\in{}_B\mathcal{M}$. 则复合态射$A\otimes M\xrightarrow{f\otimes\mathrm{Id}_M}B\otimes M\xrightarrow{m}M$赋予$M$一个左$A$模结构. 特别地, B是一个A-A双模.

命题4.1.8. 设$\mathcal{C}$是一个半群范畴, $A\in\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$是一个代数, $\mathcal{M}$是一个左$\mathcal{C}$模.

(1) 遗忘函子$G:{}_A\mathcal{M}\to\mathcal{M}$是保守的.

(2) G有左伴随函子$F:X\mapsto A\otimes X$. 其中$A\otimes X$称为**由X生成的自由A模**.

(3) 如果$\mathcal{M}$有所有小(或者有限)极限, 则${}_A\mathcal{M}$也有所有小(或者有限)极限, 并且遗忘函子${}_A\mathcal{M}\to\mathcal{M}$保持小(或者有限)极限.

(4) 如果$\mathcal{M}$有所有小(或者有限)余极限, 并且函子$A\otimes-:\mathcal{M}\to\mathcal{M}$保持小(或者有限)余极限, 则${}_A\mathcal{M}$也有所有小(或者有限)余极限, 并且遗忘函子${}_A\mathcal{M}\to\mathcal{M}$保持小(或者有限)余极限.

证明. (1) 若模同态$f:M\to N$是$\mathcal{M}$中的同构, 则f^{-1}自动是模同态.

(2) 自然态射$X\xrightarrow{u\otimes X}A\otimes X=GF(X)$和$FG(M)=A\otimes M\xrightarrow{m}M$使得$F$是$G$的左伴随.

(3) 设$p:\mathcal{I}\to{}_A\mathcal{M}$, $\alpha\mapsto M_\alpha$是一个图表, 则复合态射$A\otimes\varprojlim G(M_\alpha)\to\varprojlim A\otimes G(M_\alpha)\to\varprojlim G(M_\alpha)$赋予$\varprojlim G(M_\alpha)$一个左$A$模结构, 使得它成为图表$p$的极限.

(4) 设$p:\mathcal{I}\to{}_A\mathcal{M}$, $\alpha\mapsto M_\alpha$是一个图表, 则复合态射$A\otimes\varinjlim G(M_\alpha)\cong\varinjlim A\otimes G(M_\alpha)\to\varinjlim G(M_\alpha)$赋予$\varinjlim G(M_\alpha)$一个左$A$模结构, 使得它成为图表$p$的余极限. $\square$

命题4.1.9. 设$f:A\to B$是半群范畴$\mathcal{C}$中的一个代数同态, $\mathcal{M}$是一个左$\mathcal{C}$模. 假设$\mathcal{M}$有coequalizer, 并且函子$B\otimes-:\mathcal{M}\to\mathcal{M}$保持coequalizer. 则有自然双射$\mathrm{Hom}_{{}_B\mathcal{M}}(B\otimes_A M,N)\cong\mathrm{Hom}_{{}_A\mathcal{M}}(M,N)$, $M\in{}_A\mathcal{M}$, $N\in{}_B\mathcal{M}$.

证明. 自然态射$M\cong A\otimes_A M\xrightarrow{f\otimes_A M}B\otimes_A M$和$B\otimes_A N\to B\otimes_B N\cong N$使得$M\mapsto B\otimes_A M$是$N\mapsto N$的左伴随. $\square$

4.2. 交换代数.

定义4.2.1. 设$\mathcal{C}$是一个辫半群范畴. 一个$\mathcal{C}$中的代数A称为**交换的**, 如果下列图表交换

$$\begin{tikzcd} & A\otimes A \arrow[dr, "m"] & \\ A\otimes A \arrow[ur, "\beta_{A,A}"] \arrow[rr, "m"] & & A. \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$中由交换代数组成的完全子范畴记作$\mathrm{CAlg}(\mathcal{C})$.

构造4.2.2. 设$\mathcal{C}$是一个辫半群范畴. 对于$A, B \in \mathrm{Alg}(\mathcal{C})$, 复合态射

$$(A\otimes B)\otimes(A\otimes B) \xrightarrow{\mathrm{Id}_A \otimes \beta^{-1}_{A,B} \otimes \mathrm{Id}_B} A\otimes A\otimes B\otimes B \xrightarrow{m\otimes m} A\otimes B$$

赋予了$A\otimes B$一个代数结构, 使$\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$成为一个半群范畴. 若$\mathcal{C}$是对称的, 则$\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$成为一个对称半群范畴.

定理4.2.3. 设$\mathcal{C}$是一个辫半群范畴. 则遗忘函子$\mathrm{Alg}(\mathrm{Alg}(\mathcal{C})) \simeq \mathrm{Alg}(\mathcal{C})$诱导等价$\mathrm{Alg}(\mathrm{Alg}(\mathcal{C})) \simeq \mathrm{CAlg}(\mathcal{C})$.

证明. 根据定义, $\mathrm{Alg}(\mathrm{Alg}(\mathcal{C}))$的一个对象由一个代数$A \in \mathrm{Alg}(\mathcal{C})$及两个代数同态$u : \mathbf{1} \to A$, $m : A\otimes A \to A$组成. $u : \mathbf{1} \to A$是一个代数同态等价于说u与代数A的单位一致. 进而, $m : A\otimes A \to A$是一个代数同态等价于说m与代数A的乘法一致, 并且A是一个交换代数. 这给出了一个函子$\Phi : \mathrm{Alg}(\mathrm{Alg}(\mathcal{C})) \to \mathrm{CAlg}(\mathcal{C})$. 上述构造过程可逆回, 因此$\Phi$是等价. □

例4.2.4. $\mathrm{Alg}(\mathcal{R}ing) \simeq \mathcal{CR}ing$.

习题4.2.5. 设$\mathcal{C}$是一个对称半群范畴. 证明: 遗忘函子$\mathrm{Alg}(\mathrm{Alg}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}) \to \mathrm{Alg}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$可提升为一个对称半群等价$\mathrm{Alg}(\mathrm{Alg}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}) \simeq \mathrm{Alg}(\mathrm{Alg}(\mathcal{C})^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$, 其中的对象称为**双代数**.

定义4.2.6. 设$\mathcal{C}$是一个辫半群范畴, $A \in \mathrm{CAlg}(\mathcal{C})$. 一个**局部$A$模**是一个右$A$模$M$, 使得下列图表交换:

$$\begin{tikzcd} A\otimes M \arrow[r, "\beta_{A,M}"] & M\otimes A \arrow[d, "m"] \\ M\otimes A \arrow[u, "\beta_{M,A}"] \arrow[r, "m"] & M. \end{tikzcd}$$

全体局部A模组成$\mathcal{C}_A$的一个完全子范畴, 记作$\mathcal{C}^0_A$.

注4.2.7. 设辫半群范畴$\mathcal{C}$有coequalizer, 并且张量积关于每个变量都保持coequalizer. 设$A \in \mathrm{CAlg}(\mathcal{C})$.

(1) 一个右A模M自动成为一个A-A双模, 其中左作用定义为$A\otimes M \xrightarrow{\beta_{A,M}} M\otimes A \xrightarrow{m} M$. 我们得到一个完全忠实函子$\mathcal{C}_A \to {}_A\mathcal{C}_A$, 使得$\mathcal{C}_A$成为一个半群范畴.

(2) $\mathcal{C}^0_A$是一个辫半群范畴, 辫结构$M\otimes_A N \cong N\otimes_A M$由$\beta_{M,N} : M\otimes N \to N\otimes M$所诱导. 如果$\mathcal{C}$是对称的, 则$\mathcal{C}^0_A = \mathcal{C}_A$也是对称的.

(3) 有辫半群函子$\overline{\mathcal{C}} \to \mathfrak{Z}(\mathcal{C}_A)$, $X \mapsto X\otimes A$, 以及$\mathcal{C}^0_A \to \mathfrak{Z}(\mathcal{C}_A)$, $M \mapsto M$.

4.3. 内蕴Hom.

定义4.3.1. 设$\mathcal{C}$是一个半群范畴, $\mathcal{M}$是一个左$\mathcal{C}$模. 两个对象$M, N \in \mathcal{M}$的**内蕴Hom**是一个$\mathcal{C}$的对象$[M,N]$使得$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(-\otimes M, N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,[M,N])$. 若$[M,N]$对所有$M, N \in \mathcal{M}$都存在, 则称范畴$\mathcal{M}$ **enrich**于$\mathcal{C}$中.

例4.3.2. (1) 将半群范畴$\mathcal{C}$视为左$\mathcal{C}$模. 若X有左对偶, 则$[X,Y] \cong Y\otimes X^L$. 特别地, 若$\mathcal{C}$是刚性的, 则它enrich于自身中.

(2) 一个交换环A的模范畴LMod_A enrich于自身中, 且$[M,N] \cong \mathrm{hom}_A(M,N)$.

(3) 集合范畴$\mathcal{S}et$取乘积半群范畴结构, enrich于自身中, 且$[M,N] \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(M,N)$.

注4.3.3. 在上述定义中, 假设$[M,-]:\mathcal{M}\to\mathcal{C}$存在. (1) 由定义$[M,-]$是$-\otimes M$的右伴随.

(2) 恒同态射$M\otimes N\to M\otimes N$诱导态射$[M,N]\otimes M\to N$. 态射$X\otimes[M,N]\otimes M\to X\otimes N$诱导态射$X\otimes[M,N]\to[M,X\otimes N]$.

(3) $[M,M]$定义了一个$\mathcal{C}$中的代数, 单位$u:\mathbf{1}\to[M,M]$由$\mathbf{1}\otimes M\cong M$诱导, 乘法$m:[M,M]\otimes[M,M]\to[M,M]$由复合态射$[M,M]\otimes[M,M]\otimes M\to[M,M]\otimes M\to M$诱导. 同理$[M,N]$是一个右$[M,M]$模. 于是我们得到一个函子$\mathcal{M}\to\mathcal{C}_{[M,M]}$, $N\mapsto[M,N]$. 稍后我们将证明, 在适当的条件下这个函子是左$\mathcal{C}$模等价.

命题4.3.4. 设$\mathcal{C}$是一个半群范畴, 左$\mathcal{C}$模$\mathcal{M}$ enrich于$\mathcal{C}$中. 若$X\in\mathcal{C}$有左对偶, 则对于$M,N\in\mathcal{M}$, 典范态射$X\otimes[M,N]\to[M,X\otimes N]$是同构.

证明. 复合态射$[M,X\otimes N]\to X\otimes X^L\otimes[M,X\otimes N]\to X\otimes[M,X^L\otimes X\otimes N]\to X\otimes[M,N]$是典范态射的逆. □

构造4.3.5. 设$\mathcal{C}$是刚性的半群范畴, $A\in\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$. 若$M$是一个右$A$模, 则$m:M\otimes A\to M$诱导一个态射$A\otimes M^R\to M^R$, 使得$M^R$成为一个左$A$模. 于是有等价$\mathcal{C}_A\simeq({}_A\mathcal{C})^{\mathrm{op}}$, $M\mapsto M^R$, 它的逆是$N\mapsto N^L$.

命题4.3.6. 设$\mathcal{C}$是刚性的半群范畴有coequalizer, $A\in\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$. 有自然双射$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(M,X\otimes N)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M\otimes_A N^R,X)$, $X\in\mathcal{C}$, $M,N\in\mathcal{C}_A$.

证明. 左边是图表$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,X\otimes N)\rightrightarrows\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M\otimes A,X\otimes N)$的equalizer. 右边是图表$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M\otimes N^R,X)\rightrightarrows\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M\otimes A\otimes N^R,X)$的equalizer. □

命题4.3.7. 设刚性的半群范畴$\mathcal{C}$有coequalizer, A是一个$\mathcal{C}$中的代数. 视$\mathcal{C}_A$为一个左$\mathcal{C}$模. 则$\mathcal{C}_A$ enrich于$\mathcal{C}$中, 且有自然同构$[M,N]\cong(M\otimes_A N^R)^L$.

证明. 我们有$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(X\otimes M,N)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(M,X^R\otimes N)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M\otimes_A N^R,X^R)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,(M\otimes_A N^R)^L)$. □

4.4. **代数的中心.** 设$\mathcal{C}$是辫半群范畴$\mathcal{D}$上的半群范畴.

构造4.4.1. $\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$是$\mathrm{CAlg}(\mathcal{D})$的左模. 对于$A\in\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$和$B\in\mathrm{CAlg}(\mathcal{D})$, $B\otimes A$的乘法由$(B\otimes A)\otimes(B\otimes A)\cong B\otimes B\otimes A\otimes A\xrightarrow{m\otimes m}B\otimes A$给出.

定义4.4.2. 一个代数$A\in\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$在$\mathcal{D}$中的**中心**是一个代数$Z_{\mathcal{D}}(A)\in\mathrm{Alg}(\mathcal{D})$及一个代数同态$m:Z_{\mathcal{D}}(A)\otimes A\to A$, 使得下列图表交换:

$$\begin{tikzcd} & Z_{\mathcal{D}}(A)\otimes A \arrow[dr, "m"] & \\ A \arrow[ur, "1\otimes\mathrm{Id}_A"] \arrow[rr, "\mathrm{Id}_A"] & & A, \end{tikzcd}$$

并且满组下述泛性质. 对任意代数$B\in\mathrm{Alg}(\mathcal{D})$及代数同态$f:B\otimes A\to A$, 若下列图表交换

$$\begin{tikzcd} & B\otimes A \arrow[dr, "f"] & \\ A \arrow[ur, "1\otimes\mathrm{Id}_A"] \arrow[rr, "\mathrm{Id}_A"] & & A, \end{tikzcd}$$

则存在唯一的代数同态$g:B\to Z_{\mathcal{D}}(A)$, 使得下列图表交换

$$\begin{tikzcd} & Z_{\mathcal{D}}(A)\otimes A \arrow[dr, "m"] & \\ B\otimes A \arrow[ur, "g\otimes\mathrm{Id}_A"] \arrow[rr, "f"] & & A. \end{tikzcd}$$

当$\mathcal{D}=\mathfrak{Z}(\mathcal{C})$时, 我们将$Z_{\mathcal{D}}(A)$记作$Z(A)$, 称为$A$的**完全中心**.

注4.4.3. 复合代数同态$Z_{\mathcal{D}}(A) \otimes Z_{\mathcal{D}}(A) \otimes A \xrightarrow{\mathrm{Id}_{Z_{\mathcal{D}}(A)} \otimes m} Z_{\mathcal{D}}(A) \otimes A \xrightarrow{m} A$诱导一个代数同态$Z_{\mathcal{D}}(A) \otimes Z_{\mathcal{D}}(A) \to Z_{\mathcal{D}}(A)$, 使得$Z_{\mathcal{D}}(A) \in \mathrm{Alg}(\mathrm{Alg}(\mathcal{D})) \simeq \mathrm{CAlg}(\mathcal{D})$. 因此$Z_{\mathcal{D}}(A)$是交换代数.

定理4.4.4. 假设$[A,-]_{\mathcal{D}} : {}_A\mathcal{C}_A \to \mathcal{D}$存在. 则${}_A\mathcal{C}_A$中的典范态射$m : [A,A]_{\mathcal{D}} \otimes A \to A$是$\mathcal{C}$中的代数同态, 使得$[A,A]_{\mathcal{D}}$实现中心$Z_{\mathcal{D}}(A)$.

证明. 令$Z = [A,A]_{\mathcal{D}}$. 由交换图表

$$\begin{tikzcd}
Z \otimes A \otimes Z \otimes A \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_Z \otimes \mathrm{Id}_A \otimes m"'] & Z \otimes Z \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{Id}_Z \otimes \mathrm{Id}_A \otimes m"] & Z \otimes Z \otimes A \arrow[dl, "\mathrm{Id}_Z \otimes m"'] \arrow[d, "m \otimes \mathrm{Id}_A"] \\
Z \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{Id}_Z \otimes m"] \arrow[d, "m \otimes \mathrm{Id}_A"'] & Z \otimes A \arrow[dr, "m"] & Z \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[rr, "m"] & & A
\end{tikzcd}$$

的外层方块可知$m : Z \otimes A \to A$是代数同态.

由交换图表

$$\begin{tikzcd}
A \otimes B \otimes A \otimes A \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & B \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{Id}_B \otimes m"] \arrow[d] & B \otimes A \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
B \otimes A \otimes B \otimes A \otimes B \otimes A \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "f \otimes f \otimes f"'] & B \otimes B \otimes B \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m \otimes m"] & B \otimes A \arrow[d, "f"] \\
A \otimes A \otimes A \arrow[rr, "m"] & & A
\end{tikzcd}$$

的外层方块可知$f : B \otimes A \to A$是A-A双模同态. 因此存在唯一$\mathcal{D}$的态射$g : B \to Z$使得$m \circ (g \otimes \mathrm{Id}_A) = f$. 易见$g$保持代数的乘法. 由$B$的交换图表可知$g$保持代数的单位. □

例4.4.5. 如果$[\mathbf{1}_{\mathcal{C}}, -]_{\mathcal{D}} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$存在, 则$[\mathbf{1}_{\mathcal{C}}, \mathbf{1}_{\mathcal{C}}]_{\mathcal{D}}$是平凡代数$\mathbf{1}_{\mathcal{C}}$的中心. 特别地, 它是一个交换代数.

4.5. **Barr-Beck定理.**

定义4.5.1. 设$\mathcal{C}$是一个范畴. 半群范畴$\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{C})$中的一个代数$T$称为$\mathcal{C}$上的一个**monad**. 我们称一个函子$G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$是**monadic**, 如果存在$\mathcal{C}$上的一个monad T和范畴等价$\mathcal{D} \simeq \mathrm{LMod}_T(\mathcal{C})$, 使得$G$同构于复合函子$\mathcal{D} \simeq \mathrm{LMod}_T(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$.

例4.5.2. 若函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$是$G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$的左伴随, 则$G \circ F$是$\mathcal{C}$上的一个monad, 单位是$\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{u} G \circ F$, 乘法是$G \circ F \circ G \circ F \xrightarrow{\mathrm{Id}_G \circ v \circ \mathrm{Id}_F} G \circ F$.

引理4.5.3. 设$G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$是Abel范畴间的正合函子. (1) G是保守的, 当且仅当G将非零对象映为非零对象. (2) 若G是保守的, 则G是忠实的, 并且$G(f)$是满射(单射)当且仅当f也是.

证明. (1) 充分性. 若$G(f)$是同构, 则$\mathrm{Ker}\, G(f) = \mathrm{Coker}\, G(f) = 0$, 所以$\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Coker}\, f = 0$, 所以$f$是同构. 必要性. 若$G(X) = 0$, 则$G$将态射$X \to 0$映为同构, 所以$X = 0$.

(2) 若$G(f) = 0$, 则$\mathrm{Ker}\, G(f) = G(X)$, $\mathrm{Coker}\, G(f) = G(Y)$, 所以$\mathrm{Ker}\, f = X$, $\mathrm{Coker}\, f = Y$, 所以$f = 0$. 若$G(f)$满, 则$\mathrm{Coker}\, G(f) = 0$, 所以根据(1)有$\mathrm{Coker}\, f = 0$, 所以$f$满. □

下面是Barr-Beck定理的一个特殊情形:

定理4.5.4. 设$\mathcal{C}, \mathcal{D}$是Abel范畴. 一个函子$G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$是monadic, 使得$T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$是右正合的, 当且仅当$G$满足下列条件:

(1) G有左伴随函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$.
(2) G是保守且右正合的.

证明. 必要性. 不妨设$\mathcal{D} = \mathrm{LMod}_T(\mathcal{C})$, G是遗忘函子$\mathrm{LMod}_T(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$. 则$G$是保守的, 且有左伴随$X \mapsto T(X)$. 因为$T$右正合, 根据命题4.1.8(4), G也是右正合的.

充分性. 令$T = G \circ F$. 则T右正合. 定义函子$\phi : \mathcal{D} \to \mathrm{LMod}_T(\mathcal{C})$, $X \mapsto G(X)$. 则函子G是ϕ与遗忘函子的复合. 我们需要证明ϕ是等价. 因为G正合且保守, ϕ是忠实的.

因为$G(v_X) : GFG(X) \to G(X)$是满射, $v_X : FG(X) \to X$是满射. 设$f : G(X) \to G(Y)$是T模同态. 有交换图表

$$\begin{tikzcd}
GFG(X) \arrow[r, two heads, "G(v_X)"] \arrow[d, "GF(f)"'] & G(X) \arrow[d, "f"] \\
GFG(Y) \arrow[r, two heads, "G(v_Y)"] & G(Y).
\end{tikzcd}$$

因为G忠实, 复合态射$\mathrm{Ker}\, v_X \hookrightarrow FG(X) \xrightarrow{F(f)} FG(Y) \xrightarrow{v_Y} Y$为零. 所以存在$g$使得下列图表交换

$$\begin{tikzcd}
FG(X) \arrow[r, two heads, "v_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & X \arrow[d, "g"] \\
FG(Y) \arrow[r, two heads, "v_Y"] & Y.
\end{tikzcd}$$

因为$G(v_X)$是满射, 所以$f = G(g)$. 这证明了ϕ是完全的.

每个$M \in \mathrm{LMod}_T(\mathcal{C})$是$T(M) = \phi F(M)$的商, 因此$M$是某个$T$模同态$\phi(X) \to \phi(Y)$的余核, 因此属于$\phi$的本质像. 这证明了$\phi$是本质满的. □

定理4.5.5. 设$\mathcal{C}$是刚性的半群范畴, $\mathcal{M}$是一个左$\mathcal{C}$模, 其中$\mathcal{C}$和$\mathcal{M}$都是Abel范畴. 存在一个$\mathcal{C}$中代数A使得有左$\mathcal{C}$模等价$\mathcal{M} \simeq \mathcal{C}_A$的充分必要条件是:

(1) $\mathcal{M}$ enrich于$\mathcal{C}$中;

(2) 存在一个对象$P \in \mathcal{M}$使得$[P, -] : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$保守且右正合.

此时函子$[P, -]$诱导了左$\mathcal{C}$模等价$\mathcal{M} \simeq \mathcal{C}_{[P,P]}$.

证明. 必要性. 假设$\mathcal{M} = \mathcal{C}_A$. (1) 由命题4.3.7立得. (2) 取$P = A$. 则$[A, -] : \mathcal{C}_A \to \mathcal{C}$是遗忘函子.

充分性. 函子$F = - \otimes P : \mathcal{C} \to \mathcal{M}$是$G = [P, -]$的左伴随. 根据Barr-Beck定理, 函子$G$是monadic. 根据命题4.3.4, 我们有$G \circ F = [P, - \otimes P] \cong - \otimes [P, P]$, 所以$\mathcal{M} \simeq \mathrm{LMod}_{G \circ F}(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{C}_{[P,P]}$. □

5. 融合范畴

5.1. **融合范畴.** 设k是一个特征零的代数闭域. 令Vec为有限维k线性空间组成的范畴.

定义5.1.1. 一个k**线性范畴**是一个加法范畴$\mathcal{C}$, 对任意$X, Y \in \mathcal{C}$, Abel群$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$赋予了一个$k$线性空间结构, 使得态射复合是$k$双线性的. 设$\mathcal{C}, \mathcal{D}$是$k$线性范畴. 一个$k$**线性函子**$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$是一个加法函子, 使得映射$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$是$k$线性映射. 设$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$是$k$线性范畴. 一个$k$**双线性函子**$F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$是一个函子, 使得$F$对于每个变量是一个加法函子, 并且在态射上是$k$双线性的.

除非做特别说明, 我们假设k线性范畴间的函子都是k线性的, 并且对于k线性范畴$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$, 用记号$\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$表示$k$线性函子组成的范畴.

注5.1.2. 若$\mathcal{C}, \mathcal{D}$是k线性范畴, 则$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}$与$\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$亦然. 并且对于$k$线性范畴$\mathcal{E}$, 有$\mathrm{Fun}(\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}, \mathcal{E}) \simeq \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \oplus \mathrm{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$以及$\mathrm{Fun}(\mathcal{E}, \mathcal{C} \oplus \mathcal{D}) \simeq \mathrm{Fun}(\mathcal{E}, \mathcal{C}) \oplus \mathrm{Fun}(\mathcal{E}, \mathcal{D})$.

定义5.1.3. 一个k线性范畴$\mathcal{C}$称为**半单的**, 如果它k线性等价于有限个Vec的直和.

命题5.1.4. 一个k线性范畴$\mathcal{C}$是半单的, 当且仅当它满足下列条件:

(1) $\mathcal{C}$是半单的Abel范畴.
(2) $\mathcal{C}$有有限个单对象.
(3) 对任意$X, Y \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$是有限维$k$线性空间.

证明. 只需证充分性. 设$\mathcal{C}$有n个单对象. 有k线性函子$F : \mathrm{Vec}^{\oplus n} \to \mathcal{C}$, 将不同的单对象映为不同的单对象. 根据(3), 对于每个单对象$X \in \mathcal{C}$有$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X) = k$. 若单对象$X, Y$不同构, 则$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) = 0$. 所以$F$是完全忠实的. 根据(1)和(3), $\mathcal{C}$的每个对象都是有限个单对象的直和, 所以F本质满. 所以F是等价. □

注5.1.5. 我们有$\mathrm{Fun}(\mathrm{Vec}, \mathrm{Vec}) \simeq \mathrm{Vec}$. 所以半单$k$线性范畴间的$k$线性函子都是正合的, 并且有左右伴随. 特别地, 若$\mathcal{C}$是半单k线性范畴, 则每个k线性函子$F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Vec}$都可表示.

定义5.1.6. 一个k**线性半群范畴**是一个半群范畴$\mathcal{C}$, 范畴$\mathcal{C}$上有一个k线性结构, 使得张量积函子$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$是$k$双线性的.

定义5.1.7. 一个**多重融合范畴**是一个刚性的k线性半群范畴$\mathcal{C}$, 其中$\mathcal{C}$是半单的k线性范畴. 如果$\mathcal{C}$的单位对象是一个单对象, 则称$\mathcal{C}$是一个**融合范畴**.

例5.1.8. 若G是一个有限群, 则Vec_G是一个融合范畴, $\mathrm{Rep}\, G$是一个对称融合范畴. 更一般地, 如果H是一个半单Hopf代数, 则$\mathrm{Rep}\, H$是一个融合范畴.

定义5.1.9. 设$\mathcal{C}$是一个k线性半群范畴. 一个k**线性左**$\mathcal{C}$**模**是一个左$\mathcal{C}$模$\mathcal{M}$, 范畴$\mathcal{M}$有一个k线性结构, 使得函子$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$是$k$双线性的. 类似地可定义$k$**线性右模**和$k$**线性双模**.

定义5.1.10. 设$\mathcal{C}$是一个**多重融合范畴**. 一个**半单左**$\mathcal{C}$**模**是一个k线性左$\mathcal{C}$模$\mathcal{M}$, 使得$\mathcal{M}$是半单k线性范畴. 类似地可定义半单右模和半单双模.

注5.1.11. (1) 若$\mathcal{M}, \mathcal{N}$是半单k线性范畴, 则$\mathrm{Fun}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$是多重融合范畴, 并且$\mathrm{Fun}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$是一个半单右$\mathrm{Fun}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$模.

(2) 设$\mathcal{C}, \mathcal{D}$是多重融合范畴. 给一个半单左$\mathcal{C}$模, 等价于给一个半单k线性范畴$\mathcal{M}$和一个k线性半群函子$\mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$. 给一个半单$\mathcal{C}$-$\mathcal{D}$双模, 等价于给一个半单$k$线性范畴$\mathcal{M}$和一个$k$双线性半群函子$\mathcal{C} \times \mathcal{D}^{\mathrm{rev}} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$.

定义5.1.12. 设$\mathcal{C}$是多重融合范畴. 一个半单左$\mathcal{C}$摸$\mathcal{M}$是**不可分解的**, 如果$\mathcal{M}$非零并且不是两个非零左$\mathcal{C}$模的直和.

命题5.1.13. 设$\mathcal{C}$是多重融合范畴, $\mathcal{M}$是不可分解的半单左$\mathcal{C}$模. 则对任意非零$M \in \mathcal{M}$, 有$\mathcal{M} \simeq \mathcal{C}_{[M,M]}$.

证明. 函子$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(-\otimes M,N):\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathrm{Vec}$可表示, 即$[M,N]$存在. 所以$\mathcal{M}$ enrich于$\mathcal{C}$中. 函子$[M,-]:\mathcal{M}\to\mathcal{C}$显然正合. 为了应用定理4.5.5, 还需证明函子$[M,-]$保守.

定义$\mathcal{M}$的单对象集合上的二元关系, 使得当$[P,Q]\neq 0$时$P\sim Q$. 注意到$P\sim Q$当且仅当存在一个$X\in\mathcal{C}$和非零态射$X\otimes P\to Q$. 该关系显然是自反的. 非零$X\otimes P\to Q$诱导非零$X^R\otimes Q\to P$, 所以该关系是对称的. 非零$X\otimes P\to Q$和$Y\otimes Q\to R$诱导非零$Y\otimes X\otimes P\to R$, 所以该关系是传递的, 因而是一个等价关系. 每个等价类的直和给出一个半单左$\mathcal{C}$模. 由于$\mathcal{M}$不可分解, 故只有一个等价类. 这意味着函子$[M,-]$保守. □

推论5.1.14. 设$\mathcal{C}$是多重融合范畴, $\mathcal{M}$是半单左$\mathcal{C}$模. 则存在代数$A\in\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$使得$\mathcal{M}\simeq\mathcal{C}_A$.

命题5.1.15. 设$\mathcal{C}$是多重融合范畴, $\mathcal{M}$和$\mathcal{N}$是半单左$\mathcal{C}$模. 假设$\mathcal{M}=\mathcal{C}_A$, $\mathcal{N}=\mathcal{C}_B$. 则$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N})\simeq {}_A\mathcal{C}_B$.

证明. 函子$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N})\to {}_A\mathcal{C}_B$, $F\mapsto F(A)$与函子${}_A\mathcal{C}_B\to\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$, $V\mapsto -\otimes_A V$互逆. □

事实5.1.16. 设$\mathcal{C}$是多重融合范畴, $\mathcal{M},\mathcal{N}$是半单左$\mathcal{C}$模. 则$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$是半单的. 特别地, $\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{M})$是多重融合范畴.

5.2. 可分代数.

定义5.2.1. 设$\mathcal{C}$是多重融合范畴. 一个代数$A\in\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$是**可分的**, 如果存在$A$-$A$双模同态$\iota:A\to A\otimes A$使得$m\circ\iota=\mathrm{Id}_A$.

命题5.2.2. 设$\mathcal{C}$是多重融合范畴, $A\in\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$可分. 对任意半单左$\mathcal{C}$模$\mathcal{M}$, ${}_A\mathcal{M}$是半单k线性范畴. 对任意半单右$\mathcal{C}$模$\mathcal{N}$, $\mathcal{N}_A$是半单k线性范畴.

证明. 对于$M\in\mathcal{M}$, $\mathrm{Hom}_{{}_A\mathcal{M}}(A\otimes M,-)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(M,-)$正合, 因此自由模$A\otimes M$是投射的. 对于$V\in {}_A\mathcal{M}$, 左$A$模同态$V\cong A\otimes_A V\xrightarrow{\iota\otimes_A\mathrm{Id}_V}(A\otimes A)\otimes_A V\cong A\otimes V$使得$V$是$A\otimes V$的直和项, 所以$V$是投射的. 这证明了${}_A\mathcal{M}$是半单的Abel范畴.

令S是$\mathcal{M}$的所有单对象的直和. 则任意单对象$V\in {}_A\mathcal{M}$, $\mathrm{Hom}_{{}_A\mathcal{M}}(A\otimes S,V)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(S,V)$非零, 所以$V$是$A\otimes S$的直和项. 这证明了${}_A\mathcal{M}$只有有限个单对象. 根据命题5.1.4, 命题得证. □

推论5.2.3. 设$\mathcal{C}$是多重融合范畴. 代数$A\in\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$是可分的, 当且仅当$\mathcal{C}_A$是半单$k$线性范畴.

证明. 必要性由上述命题立得. 充分性. 令$\mathcal{M}=\mathcal{C}_A$. 根据事实5.1.16, $\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{M})$是半单的. 所以由命题5.1.15, ${}_A\mathcal{C}_A$是半单的. 所以A可分. □

5.3. 模的张量积.

定义5.3.1. 设$\mathcal{C}$是多重融合范畴, $\mathcal{M}$是一个半单右$\mathcal{C}$模, $\mathcal{N}$是一个半单左$\mathcal{C}$模, $\mathcal{P}$是一个半单k线性范畴. 一个$\mathcal{C}$**双线性函子**或**平衡$\mathcal{C}$模函子**是一个k双线性函子$F:\mathcal{M}\times\mathcal{N}\to\mathcal{P}$及一个自然同构$F(M\otimes X,N)\cong F(M,X\otimes N)$使得下列图表交换:

$$\begin{tikzcd} & F(M,N) \arrow[dr, "\sim"] & \\ F(M\otimes\mathbf{1},N) \arrow[ur, "\sim"] \arrow[rr, "\sim"] & & F(M,\mathbf{1}\otimes N), \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & F(M\otimes X,Y\otimes N) \arrow[dr, "\sim"] & \\ F(M\otimes X\otimes Y,N) \arrow[ur, "\sim"] \arrow[rr, "\sim"] & & F(M,X\otimes Y\otimes N). \end{tikzcd}$$

$\mathcal{C}$双线性函子间的一个自然变换$\xi : F \to G$是$\mathcal{C}$**双线性的**, 如果下列图表交换:

$$\begin{tikzcd} F(M \otimes X, N) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\xi_{M\otimes X,N}"'] & F(M, X \otimes N) \arrow[d, "\xi_{M,X\otimes N}"] \\ G(M \otimes X, N) \arrow[r, "\sim"] & G(M, X \otimes N). \end{tikzcd}$$

我们以$\mathrm{Fun}^{bi}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, \mathcal{P})$表示$\mathcal{C}$双线性函子和自然变换组成的范畴.

$\mathcal{M}$与$\mathcal{N}$在$\mathcal{C}$上的**张量积**是一个半单k线性范畴$\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}$, 及一个$\mathcal{C}$双线性函子$\boxtimes_{\mathcal{C}} : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to \mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}$, 使得对任意半单$k$线性范畴$\mathcal{P}$, $- \circ \boxtimes_{\mathcal{C}} : \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}, \mathcal{P}) \to \mathrm{Fun}^{bi}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, \mathcal{P})$是范畴等价.

注5.3.2. 对于半单k线性范畴$\mathcal{M}, \mathcal{N}$, 我们将$\mathcal{M} \boxtimes_{\mathrm{Vec}} \mathcal{N}$简记为$\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$, 称为$\mathcal{M}$与$\mathcal{N}$的**Deligne张量积**. 一个$k$双线性函子$\mathcal{M} \times \mathcal{N} \to \mathcal{P}$自动是一个Vec双线性函子. 所以给一个$k$双线性函子$\mathcal{M} \times \mathcal{N} \to \mathcal{P}$等价于给一个$k$线性函子$\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N} \to \mathcal{P}$.

注5.3.3. 有典范等价:

(1) $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{C} \simeq \mathcal{M}$, $\mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N} \simeq \mathcal{N}$.

(2) $(\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}') \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N} \simeq (\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}) \oplus (\mathcal{M}' \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N})$, $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} (\mathcal{N} \oplus \mathcal{N}') \simeq (\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}) \oplus (\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}')$.

(3) $(\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}) \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{P} \simeq \mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} (\mathcal{N} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{P})$.

定理5.3.4. 设$\mathcal{C}$是多重融合范畴, $\mathcal{M} = {}_A\mathcal{C}$, $\mathcal{N} = \mathcal{C}_B$, 其中$A, B$是$\mathcal{C}$中的可分代数. 则$\mathcal{C}$双线性函子$\phi : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to {}_A\mathcal{C}_B$, $(M, N) \mapsto M \otimes N$使得${}_A\mathcal{C}_B$实现张量积$\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}$.

证明. 设$F : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to \mathcal{P}$是一个$\mathcal{C}$双线性函子, 其中$\mathcal{P}$是一个半单$k$线性范畴. 设$V \in {}_A\mathcal{C}_B$. 我们有coequalizer图表$V \otimes B \otimes B \rightrightarrows V \otimes B \to V$. 令$\tilde{F}(V)$是图表$F(V \otimes B, B) \rightrightarrows F(V, B)$的coequalizer, 从而得到一个$k$线性函子$\tilde{F} : {}_A\mathcal{C}_B \to \mathcal{P}$. 这给出一个函子$\mathrm{Fun}^{bi}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, \mathcal{P}) \to \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}, \mathcal{P})$, $F \mapsto \tilde{F}$.

由于$\tilde{F}(M \otimes N)$是图表$F(M, N \otimes B \otimes B) \rightrightarrows F(M, N \otimes B)$的coequalizer, 所以同构于$F(M, N)$, 从而$\tilde{F} \circ \phi \cong F$. 反之对于$k$线性函子$G : {}_A\mathcal{C}_B \to \mathcal{P}$, 有$\widetilde{G \circ \phi} \cong G$. 所以函子$F \mapsto \tilde{F}$是等价. □

推论5.3.5. 在定理5.3.4中, 令$\mathcal{M}' = \mathcal{C}_A$. 则$\mathcal{C}$双线性函子$\mathcal{M} \times \mathcal{N} \to \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}', \mathcal{N})$, $(M, N) \mapsto - \otimes_A M \otimes N$使得$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}', \mathcal{N})$实现张量积$\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}$.

注5.3.6. 因为每个A-B双模V都是$V \otimes B$的商, 所以$\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}$的每个对象都是形如$M \boxtimes_{\mathcal{C}} N$的对象的商.

构造5.3.7. 设$\mathcal{C}$是刚性的半群范畴. 若$\mathcal{M}$是一个左$\mathcal{C}$模, 则函子$\mathcal{M}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{M}^{\mathrm{op}}$, $(M, X) \mapsto X^L \otimes M$使得$\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$成为一个右$\mathcal{C}$模, 我们将其记作$\mathcal{M}^{\mathrm{op}|L}$; 函子$\mathcal{M}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{M}^{\mathrm{op}}$, $(M, X) \mapsto X^R \otimes M$也使得$\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$成为一个右$\mathcal{C}$模, 我们将其记作$\mathcal{M}^{\mathrm{op}|R}$. 类似地, 若$\mathcal{N}$是一个右$\mathcal{C}$模, 则函子$\mathcal{C} \times \mathcal{N}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{N}^{\mathrm{op}}$, $(X, N) \mapsto N \otimes X^L$使得$\mathcal{N}^{\mathrm{op}}$成为一个左$\mathcal{C}$模, 我们将其记作$\mathcal{N}^{L|\mathrm{op}}$; 函子$\mathcal{C} \times \mathcal{N}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{N}^{\mathrm{op}}$, $(X, N) \mapsto N \otimes X^R$也使得$\mathcal{N}^{\mathrm{op}}$成为一个左$\mathcal{C}$模, 我们将其记作$\mathcal{N}^{R|\mathrm{op}}$.

推论5.3.8. 设$\mathcal{C}$是多重融合范畴, $\mathcal{M}, \mathcal{N}$是半单左$\mathcal{C}$模.

(1) 有k线性等价$\mathcal{M}^{\mathrm{op}|L} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N} \simeq \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, $M \boxtimes_{\mathcal{C}} N \mapsto [-, M]^R \otimes N$.

(2) 有k线性等价$\mathcal{M}^{\mathrm{op}|R} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N} \simeq (\mathcal{N}^{\mathrm{op}|L} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M})^{\mathrm{op}}$, $M \boxtimes_{\mathcal{C}} N \mapsto N \boxtimes_{\mathcal{C}} M$.

证明. 设$\mathcal{M} = \mathcal{C}_A$, $\mathcal{N} = \mathcal{C}_B$. (1) 有$\mathcal{M}^{\mathrm{op}|L} \simeq {}_A\mathcal{C}$, $M \mapsto M^R$, 以及

$$\mathcal{M}^{\mathrm{op}|L} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N} \simeq {}_A\mathcal{C}_B \simeq \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$$

$$M \boxtimes_{\mathcal{C}} N \mapsto M^R \otimes N \mapsto - \otimes_A M^R \otimes N \cong [-, M]^R \otimes N.$$

(2) 有$\mathcal{M}^{\mathrm{op}|R} \simeq {}_{A^{LL}}\mathcal{C}$, $M \mapsto M^L$, 以及

$$\mathcal{M}^{\mathrm{op}|R} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N} \simeq {}_{A^{LL}}\mathcal{C}_B \simeq ({}_B\mathcal{C}_A)^{\mathrm{op}} \simeq (\mathcal{N}^{\mathrm{op}|L} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M})^{\mathrm{op}}$$

$$M \boxtimes_{\mathcal{C}} N \mapsto M^L \otimes N \mapsto N^R \otimes M \mapsto N \boxtimes_{\mathcal{C}} M.$$

□

命题5.3.9. 设$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$是多重融合范畴, $\mathcal{M}$是一个半单左$\mathcal{C}$模, $\mathcal{N}$是一个半单$\mathcal{C}$-$\mathcal{D}$双模, $\mathcal{P}$是一个半单左$\mathcal{D}$模. 有范畴等价$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N})\boxtimes_{\mathcal{D}}\mathcal{P}\simeq\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N}\boxtimes_{\mathcal{D}}\mathcal{P})$, $F\boxtimes_{\mathcal{D}}P\mapsto F(-)\boxtimes_{\mathcal{D}}P$.

证明. 根据推论5.3.8(1), 有范畴等价$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N})\boxtimes_{\mathcal{D}}\mathcal{P}\simeq\mathcal{M}^{\mathrm{op}|L}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N}\boxtimes_{\mathcal{D}}\mathcal{P}\simeq\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N}\boxtimes_{\mathcal{D}}\mathcal{P})$, $([-,M]^R\otimes N)\boxtimes_{\mathcal{D}}P\mapsto M\boxtimes_{\mathcal{C}}N\boxtimes_{\mathcal{D}}P\mapsto[-,M]^R\otimes(N\boxtimes_{\mathcal{D}}P)$. □

命题5.3.10. 设$\mathcal{C}$和$\mathcal{C}'$是多重融合范畴.

(1) 若$A,B\in\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$和$A',B'\in\mathrm{Alg}(\mathcal{C}')$是可分代数, 则有$k$线性等价

$$ {}_A\mathcal{C}_B\boxtimes{}_{A'}\mathcal{C}'_{B'}\simeq{}_{A\boxtimes A'}(\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}')_{B\boxtimes B'},\quad M\boxtimes M'\mapsto M\boxtimes M'. $$

(2) 若$\mathcal{M}$是半单右$\mathcal{C}$模, $\mathcal{M}'$是半单右$\mathcal{C}'$模, $\mathcal{N}$是半单左$\mathcal{C}$模, $\mathcal{N}'$是半单左$\mathcal{C}'$模, 则有k线性等价

$$ (\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N})\boxtimes(\mathcal{M}'\boxtimes_{\mathcal{C}'}\mathcal{N}')\simeq(\mathcal{M}\boxtimes\mathcal{M}')\boxtimes_{\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}'}(\mathcal{N}\boxtimes\mathcal{N}'), $$

$$ (M\boxtimes_{\mathcal{C}}N)\boxtimes(M'\boxtimes_{\mathcal{C}'}N')\mapsto(M\boxtimes M')\boxtimes_{\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}'}(N\boxtimes N'). $$

(3) 若$\mathcal{M},\mathcal{N}$是半单左$\mathcal{C}$模, $\mathcal{M}'\mathcal{N}'$是半单左$\mathcal{C}'$模, 则有k线性等价

$$ \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N})\boxtimes\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{M}',\mathcal{N}')\simeq\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}'}(\mathcal{M}\boxtimes\mathcal{M}',\mathcal{N}\boxtimes\mathcal{M}'), $$

$$ F\boxtimes F'\mapsto F\boxtimes F'. $$

证明. (1) 令$G:{}_{A\boxtimes A'}(\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}')_{B\boxtimes B'}\to\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}'$和$G:{}_A\mathcal{C}_B\boxtimes{}_{A'}\mathcal{C}'_{B'}\to\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}'$为遗忘函子, F,F'是它们的左伴随. 由monad同构$G\circ F\cong G'\circ F'$, 结论得证.

(2) 结合(1)和定理5.3.4.

(3) 结合(1)和命题5.1.15. □

推论5.3.11. 设$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$是多重融合范畴. 则$\mathfrak{Z}(\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D})\simeq\mathfrak{Z}(\mathcal{C})\boxtimes\mathfrak{Z}(\mathcal{D})$.

5.4. **多重融合范畴的张量积.**

命题5.4.1. 一个半群范畴$\mathcal{C}$是刚性的, 当且仅当它满足下列条件:

(1) $\mathcal{C}$ enrich于自身, 并且函子$[-,\mathbf{1}]:\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{C}$是范畴等价.

(2) 对所有$X,Y\in\mathcal{C}$, 典范态射$Y\otimes[X,\mathbf{1}]\to[X,Y]$是同构.

证明. 必要性. (1) $[X,Y]=Y\otimes X^L$. 特别地, $[X,\mathbf{1}]=X^L$. (2) 由命题4.3.4立得.

充分性. 态射$u:\mathbf{1}\to[X,X]\cong X\otimes[X,\mathbf{1}]$, 及$v:[X,\mathbf{1}]\otimes X\to\mathbf{1}$使得$[X,\mathbf{1}]$是$X$的左对偶. 又因为$[-,\mathbf{1}]$是等价, $\mathcal{C}$的对象有右对偶. □

构造5.4.2. 设$\mathcal{C}$是辫多重融合范畴, $\mathcal{M}$是$\bar{\mathcal{C}}$上的多重融合范畴, $\mathcal{N}$是$\mathcal{C}$上的多重融合范畴. $\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}$双线性函子$(\mathcal{M}\boxtimes\mathcal{M})\times(\mathcal{N}\boxtimes\mathcal{N})\to\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N}$, $(M\boxtimes M',N\boxtimes N')\mapsto(M\otimes M')\boxtimes_{\mathcal{C}}(N\otimes N')$决定了一个函子$(\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N})\boxtimes(\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N})\to\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N}$, 使得$\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N}$成为一个半群范畴. 它的单位对象为$\mathbf{1}_{\mathcal{M}}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathbf{1}_{\mathcal{N}}$, 张量积为$(M\boxtimes_{\mathcal{C}}N)\otimes(M'\boxtimes_{\mathcal{C}}N')=(M\otimes M')\boxtimes_{\mathcal{C}}(N\otimes N')$. 若$\mathcal{C}$是对称多重融合范畴, $\mathcal{M}$和$\mathcal{N}$是$\mathcal{C}$上的辫多重融合范畴, 则$\mathcal{M}$和$\mathcal{N}$辫结构诱导了$\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N}$的一个辫结构.

定理5.4.3. 设$\mathcal{C}$是辫多重融合范畴, $\mathcal{M}$是$\bar{\mathcal{C}}$上的多重融合范畴, $\mathcal{N}$是$\mathcal{C}$上的多重融合范畴. 则$\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N}$是多重融合范畴.

证明. 我们需要证明$\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N}$是刚性的. 为此我们需要验证上述命题的两个条件. 易见$M^L\boxtimes_{\mathcal{C}}N^L$是$M\boxtimes_{\mathcal{C}}N$的左对偶. 因此$[M\boxtimes_{\mathcal{C}}N,\mathbf{1}]=M^L\boxtimes_{\mathcal{C}}N^L$. 有范畴等价$\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N}\simeq\mathcal{N}^{\mathrm{op}|L}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}^{L|\mathrm{op}}\simeq(\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N})^{\mathrm{op}}$, $M\boxtimes_{\mathcal{C}}N\mapsto N^L\boxtimes_{\mathcal{C}}M^L\mapsto M^L\boxtimes_{\mathcal{C}}N^L$. 因此$[-,\mathbf{1}]$是等价.

根据命题4.3.4, 当Y形如$M\boxtimes_{\mathcal{C}}N$时, 典范态射$Y\otimes[X,\mathbf{1}]\to[X,Y]$是同构. 又$-\otimes[X,\mathbf{1}]$和$[X,-]$都是正合函子, 因此该典范态射对于一般的$Y$亦是同构. □

推论5.4.4. 设$\mathcal{C}$是对称多重融合范畴, $\mathcal{M}$和$\mathcal{N}$是$\mathcal{C}$上的辫多重融合范畴. 则$\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N}$是辫多重融合范畴.

5.5. **模的对偶.**

定义5.5.1. 设$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$是多重融合范畴, $\mathcal{M}$是一个半单$\mathcal{C}$-$\mathcal{D}$双模, $\mathcal{N}$是一个半单$\mathcal{D}$-$\mathcal{C}$双模. 称$\mathcal{M}$是$\mathcal{N}$的**左对偶**, $\mathcal{N}$是$\mathcal{M}$的**右对偶**, 若存在$\mathcal{D}$-$\mathcal{D}$双模函子$u : \mathcal{D} \to \mathcal{N} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M}$和$\mathcal{C}$-$\mathcal{C}$双模函子$v : \mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \to \mathcal{C}$, 使得下列复合双模函子都与恒同函子同构:

$$\mathcal{M} \simeq \mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{D} \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathcal{M}} \boxtimes_{\mathcal{D}} u} \mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M} \xrightarrow{v \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathrm{Id}_{\mathcal{M}}} \mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M} \simeq \mathcal{M},$$

$$\mathcal{N} \simeq \mathcal{D} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \xrightarrow{u \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathrm{Id}_{\mathcal{N}}} \mathcal{N} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathcal{N}} \boxtimes_{\mathcal{C}} v} \mathcal{N} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{C} \simeq \mathcal{N}.$$

注5.5.2. 一个半单双模的左(右)对偶在典范等价下唯一.

定理5.5.3. 设$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$是多重融合范畴, $\mathcal{M}$是一个半单$\mathcal{C}$-$\mathcal{D}$双模. 则$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{C})$是$\mathcal{M}$的右对偶, $\mathrm{Fun}_{\mathcal{D}^{\mathrm{rev}}}(\mathcal{M}, \mathcal{D})$是$\mathcal{M}$的左对偶.

证明. 双模函子$u : \mathcal{D} \to \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{M}) \simeq \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{C}) \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M}$和$v : \mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$, $M \boxtimes_{\mathcal{C}} F \mapsto F(M)$使得$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{C})$是$\mathcal{M}$的右对偶. 同理可证$\mathrm{Fun}_{\mathcal{D}^{\mathrm{rev}}}(\mathcal{M}, \mathcal{D})$是$\mathcal{M}$的左对偶. □

注5.5.4. 有双模范畴等价$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{C}) \simeq \mathcal{M}^{L|\mathrm{op}|L}$和$\mathrm{Fun}_{\mathcal{D}^{\mathrm{rev}}}(\mathcal{M}, \mathcal{D}) \simeq \mathcal{M}^{R|\mathrm{op}|R}$.

定义5.5.5. 设$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$是多重融合范畴, 称一个半单$\mathcal{C}$-$\mathcal{D}$双模$\mathcal{M}$是**可逆的**, 若存在一个半单$\mathcal{D}$-$\mathcal{C}$双模$\mathcal{N}$, 及$\mathcal{C}$-$\mathcal{C}$双模等价$\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \simeq \mathcal{C}$和$\mathcal{D}$-$\mathcal{D}$双模等价$\mathcal{N} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N} \simeq \mathcal{D}$. 此时称$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$为**Morita等价**.

定理5.5.6. 设$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$是多重融合范畴, $\mathcal{M}$是一个可逆半单$\mathcal{C}$-$\mathcal{D}$双模.
(1) 典范半群函子$\mathcal{C} \to \mathrm{Fun}_{\mathcal{D}^{\mathrm{rev}}}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$和$\mathcal{D}^{\mathrm{rev}} \to \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$是等价.
(2) 典范半群函子$\mathfrak{Z}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}|\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{M}) \leftarrow \mathfrak{Z}(\mathcal{D})$是等价.
(3) 诱导的半群等价$\mathfrak{Z}(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{Z}(\mathcal{D})$是辫半群等价.

证明. 设半单$\mathcal{D}$-$\mathcal{C}$双模$\mathcal{N}$是$\mathcal{M}$的逆. 则半群函子$- \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M} : \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}}(\mathcal{C}, \mathcal{C}) \to \mathrm{Fun}_{\mathcal{D}^{\mathrm{rev}}}(\mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M}, \mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M}) \simeq \mathrm{Fun}_{\mathcal{D}^{\mathrm{rev}}}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$与$- \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{N} : \mathrm{Fun}_{\mathcal{D}^{\mathrm{rev}}}(\mathcal{M}, \mathcal{M}) \to \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}}(\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{N}, \mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{N}) \simeq \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$互逆. 类似地, 半群函子$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}|\mathcal{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{C}) \to \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}|\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$是等价. 这证明了(1)和(2).

假设$\mathfrak{Z}(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{Z}(\mathcal{D})$将$X, X'$映为$Y, Y'$. 则有交换图表:

$$\begin{tikzcd}
X \otimes X' \otimes M \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\beta_{X,X'} \otimes \mathrm{Id}_M"'] \arrow[dr, "\sim"] & X \otimes M \otimes Y' \arrow[r, "\sim"] & M \otimes Y' \otimes Y \arrow[r, "\mathrm{Id}_M \otimes \beta^{-1}_{Y,Y'}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_M \otimes \beta_{Y',Y}"] & M \otimes Y \otimes Y' \arrow[d, "\mathrm{Id}_M \otimes \beta_{Y,Y'}"] \\
X' \otimes X \otimes M \arrow[r, "\sim"] & X' \otimes M \otimes Y \arrow[r, "\sim"] \arrow[ur] & M \otimes Y \otimes Y' \arrow[r, "\mathrm{Id}_M \otimes \beta^{-1}_{Y',Y}"] & M \otimes Y' \otimes Y.
\end{tikzcd}$$

外层方块意味着$\mathfrak{Z}(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{Z}(\mathcal{D})$是辫半群等价. 这证明了(3). □

5.6. **多重融合范畴的结构.**

定义5.6.1. 称一个非零多重融合范畴是**不可分解的**, 若它不是两个非零多重融合范畴的直和.

例5.6.2. 融合范畴是不可分解的, 因为单位对象是单的.

定理5.6.3. 设$\mathcal{C}$是一个不可分解的多重融合范畴, $\mathbf{1} = e_1 \oplus \cdots \oplus e_n$是单对象分解. 令$\mathcal{C}_{ij} = e_i \otimes \mathcal{C} \otimes e_j$.
(1) $e_i \otimes e_i \cong e_i \cong e_i^R$. 当$i \neq j$时$e_i \otimes e_j = 0$. 从而$\mathcal{C} \simeq \bigoplus_{ij} \mathcal{C}_{ij}$.
(2) 若$X \in \mathcal{C}_{ij}$和$Y \in \mathcal{C}_{jl}$非零, 则$X \otimes Y$非零.
(3) $\mathcal{C}_{ij} \not\simeq 0$.
(4) $\mathcal{C}$的张量积诱导$\mathcal{C}_{ii}$-$\mathcal{C}_{ll}$双模等价$\mathcal{C}_{ij} \boxtimes_{\mathcal{C}_{jj}} \mathcal{C}_{jl} \simeq \mathcal{C}_{il} \simeq \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}_{jj}}(\mathcal{C}_{ji}, \mathcal{C}_{jl})$.
(5) $\mathcal{C}_{ij}$是可逆的$\mathcal{C}_{ii}$-$\mathcal{C}_{jj}$双模.
(6) $\mathcal{C}_{ii}$-$\mathcal{C}$双模$\bigoplus_j \mathcal{C}_{ij}$与$\mathcal{C}$-$\mathcal{C}_{ii}$双模$\bigoplus_j \mathcal{C}_{ji}$互逆.
(7) $\mathfrak{Z}(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{Z}(\mathcal{C}_{ii})$.

证明. (1) 对偶态射$\mathbf{1} \to e_i^R \otimes e_i$非零, 因此$e_i^R \otimes e_i$非零. 因此$e_i^R \otimes e_i \hookrightarrow \mathbf{1} \otimes e_i \cong e_i$和$e_i^R \otimes e_i \hookrightarrow e_i^R \otimes \mathbf{1} \cong e_i^R$都是同构. 所以$e_i \otimes e_i \cong e_i \cong e_i^R$. 因为$e_i \otimes \mathbf{1} \cong e_i$单, 所以当$i \neq j$时$e_i \otimes e_j = 0$.

(2) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes Y, X \otimes Y) \cong \mathrm{Hom}(X^L \otimes X, Y \otimes Y^L)$含有非零复合态射$X^L \otimes X \to e_j \to Y \otimes Y^L$.

(3) 定义二元关系, 当$\mathcal{C}_{ij} \not\simeq 0$时$i \sim j$. 由于$e_i \in \mathcal{C}_{ii}$, 该关系是自反的. 由于对偶诱导等价$\mathcal{C}_{ij} \simeq \mathcal{C}_{ji}^{\mathrm{op}}$, 所以该关系是对称的. 再由(2)该关系是传递的, 因而是一个等价关系. 由于$\mathcal{C}$不可分解. 该二元关系只有一个等价类.

(4) 任取非零$X \in \mathcal{C}_{ji}$和$Y \in \mathcal{C}_{jl}$. 令$A = [X, X]$, $B = [Y, Y]$. 根据(2), $[X, -] : \mathcal{C}_{ji} \to \mathcal{C}_{jj}$保守, 故由定理4.5.5, $\mathcal{C}_{ji} \simeq (\mathcal{C}_{jj})_A$. 同理$\mathcal{C}_{jl} \simeq (\mathcal{C}_{jj})_B$, 从而$\mathcal{C}_{ij} \boxtimes_{\mathcal{C}_{jj}} \mathcal{C}_{jl} \simeq \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}_{jj}}(\mathcal{C}_{ji}, \mathcal{C}_{jl}) \simeq {}_A(\mathcal{C}_{jj})_B$. 遗忘函子$G : {}_A(\mathcal{C}_{jj})_B \to \mathcal{C}_{jj}$有左伴随$F = A \otimes - \otimes B$. 函子$G' = X \otimes - \otimes Y^L : \mathcal{C}_{il} \to \mathcal{C}_{jj}$有左伴随$F' = X^L \otimes - \otimes Y$. 根据Barr-Beck定理, G和G'是monadic. 由monad同构$G \circ F \cong G' \circ F'$, 得${}_A(\mathcal{C}_{jj})_B \simeq \mathcal{C}_{il}$. 诱导的等价$\mathcal{C}_{ij} \boxtimes_{\mathcal{C}_{jj}} \mathcal{C}_{jl} \simeq \mathcal{C}_{il}$将$P \boxtimes_{\mathcal{C}_{jj}} Q$映为$P \otimes Q$.

(5)是(4)的推论.

(6) 由$\mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{C} \simeq \mathcal{C}$得$(\bigoplus_j \mathcal{C}_{ij}) \boxtimes_{\mathcal{C}} (\bigoplus_j \mathcal{C}_{ji}) \simeq \mathcal{C}_{ii}$. 由(4)知$(\bigoplus_j \mathcal{C}_{ji}) \boxtimes_{\mathcal{C}_{ii}} (\bigoplus_j \mathcal{C}_{ij}) \simeq \mathcal{C}$.

(7) 结合(6)和定理5.5.6. □

注5.6.4. 一个辫多重融合范畴是不可分解的, 当且仅当它是辫融合范畴. 事实上, 辫结构意味着当$i \neq j$时$\mathcal{C}_{ij} \simeq 0$.

定理5.6.5. 设$\mathcal{D}$是不可分解的多重融合范畴, $\mathcal{M}$是一个非零的半单右$\mathcal{D}$模, $\mathcal{C} = \mathrm{Fun}_{\mathcal{D}^{\mathrm{rev}}}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$. 则典范的半群函子$\mathcal{D}^{\mathrm{rev}} \to \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$是等价, 并且$\mathcal{M}$是可逆的$\mathcal{C}$-$\mathcal{D}$双模.

证明. 多重融合范畴$\mathrm{Fun}_{\mathcal{D}^{\mathrm{rev}}}(\mathcal{M} \oplus \mathcal{D}, \mathcal{M} \oplus \mathcal{D}) \simeq \begin{pmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{M} \\ \mathrm{Fun}_{\mathcal{D}^{\mathrm{rev}}}(\mathcal{M}, \mathcal{D}) & \mathcal{D} \end{pmatrix}$是不可分解的. 利用定理5.6.3(4)的推理可证结论. □

推论5.6.6. 设$\mathcal{C}$是一个不可分解融合范畴. 典范辫半群函子$\mathfrak{Z}(\mathcal{C}) \boxtimes \overline{\mathfrak{Z}(\mathcal{C})} \to \mathfrak{Z}(\mathfrak{Z}(\mathcal{C}))$是等价.

证明. 因为$\mathfrak{Z}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Fun}_{\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}^{\mathrm{rev}}}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$, 所以$\mathcal{C}$是可逆的$\mathfrak{Z}(\mathcal{C})$-$\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$双模. 应用定理5.5.6, 结论得证. □

推论5.6.7. 设$\mathcal{C}$是融合范畴. 则$\mathcal{C} \simeq \mathfrak{Z}(\mathcal{C})_{[\mathbf{1},\mathbf{1}]_{\mathfrak{Z}(\mathcal{C})}}$.

证明. 由于$\mathrm{Fun}_{\mathfrak{Z}(\mathcal{C})}(\mathcal{C}, \mathcal{C}) \simeq \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$的单位对象是单的, $\mathcal{C}$是不可分解的左$\mathfrak{Z}(\mathcal{C})$模. 根据命题5.1.13, $\mathcal{C} \simeq \mathfrak{Z}(\mathcal{C})_{[\mathbf{1},\mathbf{1}]_{\mathfrak{Z}(\mathcal{C})}}$. □

推论5.6.8. 设$\mathcal{C}$是一个融合范畴. 若$\mathfrak{Z}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Vec}$, 则$\mathcal{C} \simeq \mathrm{Vec}$.

推论5.6.9. 设$\mathcal{C}$是一个多重融合范畴. 若$\mathfrak{Z}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Vec}$, 则存在半单$k$线性范畴$\mathcal{M}$使得$\mathcal{C} \simeq \mathrm{Fun}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$.

证明. 由于$\mathfrak{Z}(\mathcal{C})$不可分解, $\mathcal{C}$不可分解. 令$\mathcal{M} = \bigoplus_j \mathcal{C}_{ji}$. 则$\mathcal{M}$是可逆的$\mathcal{C}$-$\mathcal{C}_{ii}$双模, 故$\mathcal{C} \simeq \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}_{ii}^{\mathrm{rev}}}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$. 因为$\mathfrak{Z}(\mathcal{C}_{ii}) \simeq \mathfrak{Z}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Vec}$, 所以$\mathcal{C}_{ii} \simeq \mathrm{Vec}$. □

5.7. 全局维数.

引理5.7.1. 设$\mathcal{C}$是多重融合范畴, $X \in \mathcal{C}$是一个单对象. 有非典范同构$X^L \cong X^R$.

证明. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^L, X^R) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes X^L, \mathbf{1}) \neq 0$. □

定义5.7.2. 设$\mathcal{C}$是一个融合范畴. 一个单对象$X \in \mathcal{C}$的**平方范数**定义为标量

$$\|X\|^2 : \mathbf{1} \xrightarrow{u \otimes u} X^R \otimes X \otimes X \otimes X^L \xrightarrow{f^{-1} \otimes \mathrm{Id}_X \otimes \mathrm{Id}_X \otimes f} X^L \otimes X \otimes X \otimes X^R \xrightarrow{v \otimes v} \mathbf{1}$$

其中$f : X^L \to X^R$是一个同构. $\mathcal{C}$的**全局维数**$\dim \mathcal{C}$定义为所有单对象的平方范数之和.

注5.7.3. (1) $\|\mathbf{1}\|^2 = 1$.

(2) 由于不同f的选取只相差一个倍数, 所以$\|X\|^2$与f选取无关.

(3) 对于融合范畴$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$, $\dim(\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}) = \dim \mathcal{C} \dim \mathcal{D}$.

事实5.7.4. $\|X\|^2 > 0$. 特别地, $\dim \mathcal{C} \geq 1$; 等式成立当且仅当$\mathcal{C} \simeq \mathrm{Vec}$.

事实5.7.5. 设$\mathcal{C}$是融合范畴. 则$\dim \mathfrak{Z}(\mathcal{C}) = (\dim \mathcal{C})^2$.

推论5.7.6. 设$\mathcal{C}$是一个融合范畴, $\mathcal{M}$是不可分解的半单左$\mathcal{C}$模. 则$\dim \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{M}) = \dim \mathcal{C}$.

证明. 结合定理5.5.6, 定理5.6.5和上述事实. □

例5.7.7. 设G是一个有限群. 有$\dim \mathrm{Rep}\, G = \dim \mathrm{Vec}_G = |G|$. 因而$\dim \mathfrak{Z}(\mathrm{Rep}\, G) = \dim \mathfrak{Z}(\mathrm{Vec}_G) = |G|^2$, $\dim \mathrm{Fun}_{\mathrm{Rep}_G}(\mathrm{Vec}, \mathrm{Vec}) = |G|$. 显然半群函子$\mathrm{Vec}_G \to \mathrm{Fun}_{\mathrm{Rep}_G}(\mathrm{Vec}, \mathrm{Vec})$将单对象映为单对象, 所以是等价. 于是根据定理5.6.5, Vec是可逆Vec_G-$\mathrm{Rep}\, G$双模, 并且半群函子$\mathrm{Rep}_G \to \mathrm{Fun}_{\mathrm{Vec}_G}(\mathrm{Vec}, \mathrm{Vec})$也是等价.

假设G是Abel群. 则G的不可约表示都是一维的, 因而与群同态$\chi : G \to \mathbb{C}^\times$一一对应. 单对象$\mathbb{C}_g \in \mathrm{Vec}_G$及其上的半辫$\chi(h) : \mathbb{C}_g \otimes \mathbb{C}_h \to \mathbb{C}_g \otimes \mathbb{C}_h$定义了$\mathfrak{Z}(\mathrm{Vec}_G)$的一个单对象$(\mathbb{C}_g, \chi)$. 由于$\dim \mathfrak{Z}(\mathrm{Vec}_G) = |G|^2$, $(\mathbb{C}_g, \chi)$列举了所有的单对象. 有半群等价$\mathfrak{Z}(\mathrm{Vec}_G) \simeq \mathrm{Vec}_G \boxtimes \mathrm{Rep}\, G$, $(\mathbb{C}_g, \chi) \mapsto \mathbb{C}_g \boxtimes \mathbb{C}^\chi$. 遗忘函子$\mathfrak{Z}(\mathrm{Vec}_G) \to \mathrm{Rep}_G$将$(\mathbb{C}_g, \chi)$映为一维表示$\mathbb{C}^\chi$.