
量纲分析与标度律 (DIMENSIONAL ANALYSIS AND SCALING LAWS)

—清华大学丘成桐数学科学中心讨论班讲义

孙博华 (Bo Hua Sun)
Member of Academy of Science of South Africa (ASSAf)
Chair Professor and PI
Beijing Institute of Nanoenergy and Systems
Chinese Academy of Sciences
email: sunbohua@binn.cas.cn

Chinese Academy of Sciences (2024)

Copyright ©2019 by Bo Hua Sun. All rights reserved.

Published by Sun Physics Laboratory @ BINN.CAS.CN
Beijing, China.

No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, scanning.

Limit of Liability/Disclaimer of Warranty: While the publisher and author have used their best efforts in preparing this book, they make no representations or warranties with respect to the accuracy or completeness of the contents of this book and specifically disclaim any implied warranties of merchantability or fitness for a particular purpose. No warranty may be created or extended by sales representatives or written sales materials. The advice and strategies contained herein may not be suitable for your situation. You should consult with a professional where appropriate. Neither the publisher nor author shall be liable for any loss of profit or any other commercial damages, including but not limited to special, incidental, consequential, or other damages.

量纲分析与标度律(Dimensional Analysis and Scaling Laws) / Bo Hua Sun . . . [et al.].

Printed in China.

感谢丘成桐院士邀请我在
清华大学开设这个讨论班

时间Time: Fri., 15:20-16:55,

Sept. 20-Nov. 8, 2024

地点Venue: C546, Shuangqing Complex
Building A

(校外, 清华大学双清综合
楼A座C546)

<https://ymsc.tsinghua.edu.cn/info/1053/3902.htm>

大风起兮云飞扬
威加海内兮归故乡
安得猛士兮守四方
—[汉] 刘邦

[我希望我能够值得并赢得诸君的信赖。但我首先求诸君只须信赖科学，信赖自己。追求真理的勇气和对于精神力量的信仰是研究哲学¹的第一个条件。人既然是精神，则他必须而且应该自视为配得上最高尚的东西，切不可低估或小视他本身精神的伟大和力量。

人有了这样的信心，没有什么东西会坚硬顽固到不对他展开。那最初隐蔽蕴藏着的宇宙本质，并没有力量可以抵抗求知的勇气；它必然会向勇毅的求知者揭开它的秘密，而将它的财富和宝藏公开给他，让他享受。]

—（德）黑格尔，《哲学史讲演录》，开讲辞，1816年10月28日在海得堡大学

¹那个时候哲学也包括科学。

PREFACE

对于理工科的学生和学者，什么是最一般性的科学分析工具？

我个人认为，量纲分析、张量分析和Lie群对称性方法，是三大最一般的科学工具。一个从事科学研究工作的学者，应当尽量掌握这三种工具。对于量纲分析和Lie群对称性方法，请参考作者的专著¹。

那么，我们为什么需要量纲和学习量纲分析？一句话，就是追求“物理规律的量纲一致性”，即物理规律的量纲必须保持一致。换句话说，物理规律表达式等号二边的量纲必须一致。对量纲进行研究和应用的学问就是量纲分析。可见，这门学问是多么的重要。

随着人类对自然界探索活动的深入，遇到的问题也愈来愈复杂，往往涉及多尺度、多层次、多材料和多物理的耦合问题。虽然有各种各样的分析方法，但都有其局限性，我们现在的的问题是，是否有一种普遍方法来处理这些复杂的问题。回答是肯定的，这个普遍适用的方法就是量纲分析方法，它是探讨科学规律、解决科学和工程问题的一个普适方法，是一门非常值得学习和掌握的科学工具。

解决一个复杂问题，除了需要理解具体问题的物理理论外，还需要掌握与物理概念密切相关的量纲分析方法和相似论。它们既可以用于数据整理，也可以在不求解问题前就对问题有个定量和定性的把握。对于有些复杂问题，建立其数学模型有时可能非常困难，或者方程非常复杂难以求解，或者求解的过程非常复杂不便于实际应用。有时需要做试验，而实际尺寸很难在试验条件中实现，必须缩小尺寸做模型试验，这时必须要求满足一定的相似条件，这种条件必须建立在量纲分析和相似论的基础上才能建立。一般来讲，对于复杂问题，特别是研究开始时一般都要先进行量纲分析和相似性分析，尽量找出一些一般性规律，发现主导参量，细化演化过程，以便在建模和分析时简化问题。

¹孙博华，量纲分析和Lie群，高等教育出版社(2016)

量纲分析(dimensional analysis)很难说从何时开始,基本上它是推广古希腊几何中的相似与比例的观念。很多科学大师如Newton、Fourier、Maxwell等处理问题时内心深处其实是有量纲的概念,但不成系统。法国数学家J.Fourier的名著Analytical Theory of Heat(热的解析理论)就有量纲分析的论述,20世纪初量纲分析才逐渐成形,并且是物理学、数学中建立数学模型的重要方法之一。牛顿第二定律 $F = ma$ 的物理关系,其方程式应该与计量物理量的单位无关。这导致一个重要结论:任何有意义的定律,对于其方程式的每一个计量单位,都必需是齐次方程式。这个认识的最终形式成为 π 定理,即假设一个有物理意义的方程式具有 n 个变数与 m 个基本量纲, π 定理描述怎样将这方程式等价地写成具有 $n - m$ 个无量纲参数的方程式。更重要的是,从给定的变数,这定理给出了一种能够计算这些无量纲参数的方法。

通过量纲分析可以检查反映物理规律的方程在计量方面是否合理。即利用物理定律的量纲平衡(齐次原理)确定各物理量之间的关系。一个成熟的物理学家或工程学家如果要探究某一个问題,往往是从定性到半定量至定量的分析过程,从量纲分析入手。1991年诺贝尔物理奖获得者P.G de Gennes²的研究风格就是对量纲分析方法最好的诠释。他曾说,在描述物理现象时,要将全部细节融为一体,经常是即便可能也没什么用。其实我们真正需要的是一种简单的标度公式,其中 x 的系数可取用独立的实验点来加以调整。这样的简单但极其优美的公式可以让我们更好的理解物理现象的本质:何谓过程?何谓根本因素?³

在中国,有些著名学者特别喜欢使用并积极推广量纲分析方法,如钱学森^{4 5 6}(超声速空气动力学),钱伟长⁷(摄动方法)⁸,郑哲敏(爆炸力学)^{9 10 11 12},谈庆明¹³,和赵凯华¹⁵。

作者荣幸得到著名数学家丘成桐院士的邀请,使我有机会在母校清华大学开设几个讨论班,这是第一个讨论班。

为使大家尽快掌握量纲分析方法和从复杂的问题中寻找标度律,特地编写了这本讲义¹⁶。在这本简明讲义中,主要介绍量纲分析的基本概念、理论和教学例题,结合课堂讲解,并通过最新的实战课题,以期可以把参加这个讨论班的同学,从零起点快速的提升到可以用量纲分析做自己科研课题的程度。

²德热纳(法国),软物质科学开拓者和奠基人,被誉为“当代的牛顿”。

³P.G. de Gennes, Soft Interfaces, 高等教育出版社(2013)

⁴钱学森(1911年12月11日—2009年10月31日),世界著名空气动力学家,中国科学院暨中国工程院院士,两弹一星功勋奖章获得者。曾任美国麻省理工学院及加州理工学院教授,为中美两国的导弹和航天计划都做出过重大贡献。被誉为“中国航天之父”和“火箭之王”

⁵Tsien, H.S. Similarity laws of hypersonic flows. J. Math. Phys. 25, 247-251, (1946).

⁶Tsien, H.S.: The equations of gas dynamics. In: Emmons, H.W. (ed.) Fundamentals of Gas Dynamics. Oxford University Press, London (1958).

⁷钱伟长(1912年10月9日—2010年7月30日),中国力学家、应用数学家、教育家,中国科学院院士,中国近代力学、应用数学的奠基人之一。

⁸钱伟长等,《弹性圆薄板大挠度问题》1954年3月。

⁹郑哲敏(1924年10月2日—),中国著名力学家、爆炸力学家,中国爆炸力学的主要开拓者,中国科学院院士(1980年),美国工程院外籍院士(1993年),中国工程院首届院士(1994年),2012年,获中华人民共和国国家最高科学技术奖。

¹⁰郑哲敏,破甲过程初步分析及一些基础知识,力学情报,总第23期,1973年第5期,10月25日出版, pp 36-74.

¹¹郑哲敏,连续介质力学与断裂,力学进展,第12卷第2期, pp 133-140, 1982

¹²郑哲敏,从数量级和量纲分析看煤与瓦斯突出的机理,《力学与生产建设》,1982,北京大学出版社, pp 128-137

¹³谈庆明,量纲分析,中国科技大学出版社,2007.

¹⁴Tan Qingming, Dimensional Analysis, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.

¹⁵赵凯华《定性与半定量物理学》,高等教育出版社,2008

¹⁶本讲义的基本理论部分主要参考作者的专著:孙博华,量纲分析与Lie群,高等教育出版社(2016)

本人在1989-1991年期间在清华大学工程力学系跟随该系创始人张维院士从事博士后研究工作，希望以此讲义向导师张维院士致敬，并献给母校清华大学。

本人才疏学浅，不妥之处，还望赐教为盼。

孙博华(BO HUA SUN)

中国北京中科院纳米能源与系统研究所
(2024年09月19日)

CONTENTS

Preface	vii
List of Figures	xiii
List of Tables	xv
1 概论	1
1.1 简史	2
1.2 量纲分析和相似论的核心知识点	4
1.3 量纲分析学习资料	4
2 从点源强爆炸开始	7
3 量纲分析的基本概念和II定理	11
3.1 量纲和基本单位	11
3.2 量纲的幂次定律	13
3.3 量纲一致性原理	14
3.4 Buckingham II定理	15
4 量纲分析的六步方法和难点	17
4.1 量纲分析的6步法	17
4.2 量纲分析的难点	17
Problems	18
	xi

5	量纲分析的教学例题	19
5.1	肥皂泡中压强	19
5.2	机翼的升力	21
5.3	管中的流动摩擦阻力	24
5.4	弹性线在拉紧状态下的振动频率	26
5.5	单摆的振动周期问题	27
5.6	Rayleigh低速绕流换热问题	28
6	量纲分析的应用专题	29
6.1	破甲弹金属射流的稳定性问题	29
6.2	薄板在高速射流冲击下的撕裂问题	32
6.3	固体的断裂问题	34
6.4	航天器液体推进剂的晃动问题	36
6.5	海面原油泄漏的扩展问题	38
6.6	风吹声问题	39
6.7	不可压各向同性湍流的标度律	40
6.8	沙漠治理中草方格的障沙问题	43
6.9	水力压裂	46
6.9.1	水力压裂的量纲分析	47
6.9.2	不同情况的简化	48
6.9.3	时间效应	48
6.9.4	结论	48
7	量纲分析的扩展	49
7.1	定向量纲	49
7.1.1	炮弹的水平距离	50
7.1.2	弹性线的振动能量	51
7.1.3	弹性圆球的接触问题	51
8	相似论	55
8.1	相似论基本概念	55
8.2	弹性梁的挠度	57
8.3	相似变量	58
9	量纲分析的不完全相似问题	61
	References	63
	参考文献	63
10	思考题	67

LIST OF FIGURES

2.1	原子弹爆炸的球形冲击波	8
2.2	世界第一颗原子弹Trinity从0.1msec至1.93msec爆炸火球的照片	10
3.1	水面上爬行(图取自Yunus A. Fluid mechanics,2010).	13
3.2	不同性质的东西不能相加.	15
5.1	肥皂泡中压强.(图取自Yunus A. Fluid mechanics,2010)	19
5.2	机翼的升力.(图取自Yunus A. Fluid mechanics,2010)	22
5.3	高超声速飞行器.	24
5.4	管中的流动摩擦阻力.(图取自Yunus A. Fluid mechanics,2010)	24
6.1	湍流.	41
6.2	湍流的串级.	42
6.3	湍流的Kolmogorov $5/3$ 标度率.	42
6.4	草方格沙障.	44
6.5	草方格内的空气漩涡示意图.	45
6.6	草方格沙面形成示意图.	45

LIST OF TABLES

2.1	点源强爆炸参量的量纲	8
3.1	基本物理量量纲和国际SI单位	12
4.1	量纲分析的6步法	18
5.1	参量的基本量纲	20
5.2	参量的基本量纲	22
5.3	参量的基本量纲	25
5.4	弹性线的振动频率问题参量的量纲	26
5.5	单摆的振动参量的量纲	27
5.6	Rayleigh低速绕流换热问题参量的量纲	28
6.1	破甲射流稳定性参量的量纲	30
6.2	薄板撕裂长度问题参量的量纲	32
6.3	薄板发生断裂的时间问题参量的量纲	33
6.4	薄板撕裂问题参量的量纲	33
6.5	固体的断裂问题参量的量纲	35
6.6	液体推进剂的晃动问题参量的量纲	37

6.7	海面原油泄漏的扩展问题参量的量纲	38
6.8	卡门涡街问题参量的量纲	40
6.9	参量的基本量纲	43
6.10	参量的基本量纲	45
6.11	水力压裂参量的量纲	47
7.1	参量的基本量纲	50
7.2	参量的基本量纲	51
7.3	参量的基本量纲	51
7.4	弹性圆球的接触问题(a)参量的量纲	52
7.5	弹性圆球的接触问题(b)参量的量纲	52

CHAPTER 1

概论

好好学习，天天向上

—毛泽东

随着人类对自然的探索活动愈来愈深入，遇到的问题也愈来愈复杂，多尺度，多层次，多材料，多物理的耦合问题对计算技术的要求愈来愈高，但计算产生的大数据是否正确需要认真分析判断，这种数据分析必须建立在正确的物理基础之上，否则就会生产出海量的垃圾数据。解决一个复杂问题，除了具体问题的物理理论需要理解外，还需要掌握与物理概念密切相关的量纲分析方法和相似论。它们既可以用于数据整理，也可以在不求解问题前对问题的结果有个定量和定性的把握。对于有些复杂问题，建立其数学模型有时非常困难，或者方程非常复杂求解有困难，或者求解的过程非常复杂不便于实际需要，这种情况在空气动力学，流体力学等问题中是经常出现的。有时还需要做试验，实际尺寸很难在试验条件中实现，必须缩小尺寸做模型试验，这时必须要求满足一定的相似条件，这种条件必须建立在量纲分析和相似论的基础上才能建立。一般来讲，对于复杂问题，特别是第一次研究一般都要先进行量纲分析和相似性研究，尽量找出一些一般性规律，然后再深入探索。

量纲分析是一门非常值得研究和学习的知识，它是探讨科学规律，解决科学和工程问题的一个有效的工具。

1.1 简史

量纲(因次)分析(dimensional analysis)很难说从何时开始,基本上它是推广古希腊几何中的相似与比例的观念。所有的大师如牛顿、Maxwell¹、Boltzmann、Lord Kelvin、Planck、Einstein...等等,他们在处理问题时内心深处其实是有量纲(dimension)的概念,但不成系统。法国数学家J. Fourier²(1768 - 1830)的名著:热的解析理论(*Analytical Theory of Heat*)就有量纲分析的论述,20世纪初量纲分析才逐渐成形,并且是物理学、数学中建立数学模型的重要方法之一。类似牛顿第二定律 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 的物理定律,其方程式应该与计量物理量的单位无关。这引致出重要结论:有意义的定律,对于其方程式的每一个计量单位,这方程式都必需是齐次方程式。这结果最终形式化成为白金汉II定理(Buckingham II theorem)。假设一个有物理意义的方程式具有 n 个变数与 m 个基础量纲,白金汉II定理描述怎样将这方程式等价地重写为具有 $n-m$ 个无量纲参数的方程式。更重要的是,从设定的变数,这定理给出了一种能够计算这些无量纲参数的方法。

通过量纲分析可以检查反映物理现象规律的方程在计量方面是否合理。它是在经验和实验的基础上,利用物理定律的量纲平衡(齐次)原则,确定各物理量之间的关系。一个成熟的物理学家如果要探究某一个问题的時候,往往是从定性或者半定量的角度入手分析,他所使用的方法就是像数量级、量纲分析、对称性分析等等。

在量纲分析发展历史上一个特别有名的案例是二次世界大战期间英国流体力学大师G. I. Taylor (3/7/1886-6/27/1975)为着研究原子弹爆炸(点源强爆炸)³,发现了冲击波球面半径与时间的 $2/5$ 成正比的规律,并从量纲分析的角度引进新的相似变量(similar variables)将偏微分方程组化为常微分方程,从而得出自相似解(self-similar solution)⁴,计算预测了世界第一个原子弹的当量,曾引起很大的国际社会反响,害得美国要调查是否有洩密事件。

Buckingham [3] 于1914年发表了一篇著名长文详细论述了量纲分析,并提出了寻求无量纲量的系统方法,是量纲分析方法的奠基之作。他提出的量纲定量被Bridgman称为 π 定理,即假设一个有物理意义的方程式具有 n 个变数与 m 个基本量纲, π 定理描述怎样将这方程式等价地写成具有 $n-m$ 个无量纲参数的方程式,更重要的是,从给定的变数,这定理给出了一种能够计算这些无量纲参数的方法。

自从1914年Buckingham [3]发表其著名的论文至今的100多年来,量纲分析方法主要有下面几个里程碑:

1914年: 1914年Buckingham [3]发表其著名的论文【On physically similar systems: illustration of the use of dimensional equations[J]. *Phys. Rev.* 1914, 4:345 - 376】,开启量纲分析的新纪元。

1915年: Rayleigh [40] 在物理上展示了量纲分析的应用。

1922年: 由于Buckingham [3] 在论文中使用希腊字母 π 表示无量纲量,美国学者P.W.Bridgman在其1922年出版的专著《*Dimensional Analysis*》[5]将这个定理命名为Buckingham π 定理(简称 π 定理)。Bridgman的这部书是他在哈佛大

¹James Clerk Maxwell's *Treatise on Electricity and Magnetism* (third edition, Clarendon Press, Cambridge, 1891; republished by Dover, New York, 1954).

²J.B.J. Fourier. *Theorie Analytique de la Chaleur*, Vol. 2, Ser.7, Ch. 2, Sec.9, pp. 135 - 140, Firmin Didot, Paris, 1822.

³Sir G.I. Taylor, The formation of a blast wave by a very intense explosion. I. Theoretical discussion, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 201, No. 1065. (Mar. 22, 1950), pp. 159-174.

⁴G.I. Taylor, The formation of a blast wave by a very intense explosion: II. The atomic explosion of 1945. *Proceedings of the Royal Society A* 201, 1950, pp. 493 - 509.

学给研究生的5次讲座基础上整理而成，是世界上第一部量纲分析专著。1946年Bridgman 由于高压物理的研究获得诺贝尔物理学奖，他是至今为止力学领域唯一获得诺贝尔奖的学者。

1925年： J. Prandtl [7] 在研究湍流边界层时，由于不知道湍流的Reynold 应力，推导的方程根本不可能求解。这时他们大胆利用量纲分析，猜测速度梯度反比于离壁面坐标，从而获得有名的壁湍流的对数标度律。

1941年： 1941年英国力学大师G.I.Taylor 对点源强爆炸研究[8, 9, 10]，他发现了点源爆炸的能量正比于冲击波球面半径的5次方与传播时间的-2 幂次方成正比的规律， $E = [S(\gamma)]^{-5} \rho_0 R^5 t^{-2}$ 。

1941年： 1941年的不可压均匀各向同性湍流的柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov) 标度律(K41) [11, 12]， $E = C_k \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$ 。

1967年： 1967年Huntley [41] 提出指向量纲分析”Directional dimensional analysis”，给原来的长度尺度加上了方向，比如在x 坐标分析的长度尺度从原来的L 变成 L_x ，Huntley 的方法很少有人使用。

1979年： 被誉为现代牛顿的诺贝尔物理学奖得主P. G. de Gennes (德热纳) 出版标度律专著【Scaling Concepts in Polymer Physics. Cornell University Press, 1979.】，用量纲分析处理跨尺度的软物质问题[14]，为了突出问题的本质，追求”universal” properties (普适性质)，他甚至在全书几乎省略了公式中的系数 “I ignore numerical coefficients in most formulas...”，而专注于问题的标度特性，可以说，德热纳把量纲分析和标度律的提高到一个新的境界。可以说，没有量纲分析和标度律就不可能处理包括跨尺度的软物质问题。

1979年： 1979年，俄罗斯学者Barenblatt 引入了非完整相似的标度律概念[44]。

1985年： 1985年Siano [42, 43] 【Siano D. Orientational Analysis. J. Franklin Institute(1985)】指出Huntley [41] 的方法不利于物理常数的定义，提出”Orientational Analysis” (方向分析) 概念，特别是对于问题中无量纲参量引进了一个无方向算符，提出了方向齐性定理。遗憾的是我没有看到任何使用Siano 方法的论文。

2004年： Sonin [18] 【Sonin, A generalization of the Π -theorem and dimensional analysis. PNAS, 2004】试图把问题中保持不变的量 (比如一些物理常数) 进一步的组合简化，期望以此减少最终的无量纲 Π 的数量，从实际情况看根本减少不了 Π 的数量，其方法是不可行的。

在数学方面，Birkhoff(1950) 和Ovsinnikov (1962) 把量纲理论与Lie 群建立了联系[19, 20]，发现量纲分析与偏微分方程的相似解具有共同的数学基础。指出量纲分析或理论实际是一种变换，只不过这种变换不是一般性的变换，而是Lie群中一种特殊变换，即拉伸变换(dilatation)。一般的量纲理论是基于多参数的不变拉伸变换群，或称拉伸群[20, 21]。也就是说，量纲理论只是Lie 群的一个特殊情况，或者说Lie群方法更一般，因为Lie 群不仅有拉伸群，而且还有平移、转动等一般的变换。量纲分析有时也称相似论，实际上是基于物理量纲的齐次不变性，即数学上的对称性，对称性是Lie群的核心[22]。[所以，美国著名学者Cantwell 倡议[23]：对于理工科的学生，一是要学习量纲分析方法，二是要掌握Lie 群对称分析。前者建立物理模型，后者求解或分析解的结构。]

特别需要指出的是，中国学者利用量纲分析曾获得很好的结果，如国家最高科学奖获得者郑哲敏院士从数量级和量纲分析研究了煤与瓦斯突出的机理[24]，郑哲

4 概论

敏[25]研究连续介质力学与断裂，赵亚溥[26]研究发现Hamaker常数是连续介质力学向介观力学过渡的标杆作用；另外谈庆明[59]还出版了专著《量纲分析》；本课程申请人孙博华出版了《量纲分析与Lie群》[22]，并利用量纲分析研究了在Newton引力场中多体系统的开普勒第三定律、可压缩湍流的空间标度律、毛细效应引导的薄膜皱纹和折纸弹簧的标度律等问题[29, 30, 31, 32, 33]。

1.2 量纲分析核心知识点

一个具体的课程都有其核心内容或知识点，一般情况没有几个，把它们掌握了基本就可以了解该课程的全貌。这就是知识快速传播可行性的科学基础。

量纲分析和相似论课程核心知识点：量纲概念，7个基本单位，量纲幂次定理，量纲一致性定律， Π 定理，量纲分析6步法；模型实验与原问题要相似要求其相似模数都必须相等。

1.3 量纲分析学习资料

任何课程都不能完全依靠课堂学习，必须课外刻苦自修。如果你希望对量纲分析做进一步的了解，先给你开个书目，下面的材料基本可以给你展示这方面的主要成果。

1. Fourier J (1822) *Théorie analytique de la chaleur* (Paris).
2. J.C. Maxwell, On the mathematical classification of physical quantities, *Proc. Lond. Math. Soc.*, Vol. 3, Pt. 34, pp. 224, March 1871.
3. E. Buckingham, On physically similar systems: illustration of the use of dimensional equations, *Phys. Rev.*, Vol.4, pp.345 - 376, 1914.
4. E. Buckingham, The principle of similitude, *Nature*, Vol. 96, p. 396, London, 9th December 1915.
5. Rayleigh, Lord, The Principle of Similitude; *Nature*, vol. 95, 2368, p. 66, 1915 March 18.
6. P.W. Bridgman, *Dimensional Analysis*. Rev. Ed., Yale University Press, New Haven, 1922.
7. Langhaar, H. L. (1951), *Dimensional Analysis and Theory of Models*, Wiley, ISBN 0-88275-682-6.
8. Huntley H (1952) *Dimensional analysis* (Macdonald, London).
9. W J Duncan. *Physical Similarity and Dimensional Analysis*. Edward Arnold Publishers. London, 1953.
10. L. I. Sedov, 1959, *Similarity and Dimensional Analysis in Mechanics*, Academic Press, New York.
11. E C Ipsen. *Units, Dimensions and Dimensionless Numbers*. McGraw-Hill. New York, 1960.

12. Palacios, J., 1964, *Dimensional Analysis*, MacMillan, London.
13. de Jong, F. J., 1967, *Dimensional Analysis for Economists*, Nort Holland, Amsterdam.
14. Baker, W. E., Westine, P. S., and Dodge, F. T., 1973, *Similarity Methods in Engineering Dynamics*, Hayden, Rochelle Park, N.J.
15. E.S. Taylor, *Dimensional Analysis for Engineers*, Clarendon Press, Oxford, 1974.
16. Görtler H (1975) *Dimensionsanalyse* (Springer, Berlin).
17. E de Isaacson and M de Isaacson. *Dimensional Methods in Engineering and Physics*. Edward Arnold Publishers. London, 1975.
18. G.I. Barenblatt, *Dimensional Analysis*, Gordon and Breach, New York, 1987.
19. Lokarnik, M., 1991, *Dimensional Analysis and Scale-Up in Chemical Engineering*, Springer Verlag, Berlin.
20. 钱伟长, 应用数学, 安徽科学技术出版社, 1993。
21. G. I. Barenblatt, *Scaling, Self-similarity, and Intermediate Asymptotics*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, (1996).
22. 郑哲敏, 相似理论与模化, 《中国机械工程手册》, 1996年。
23. G. I. Barenblatt, *Scaling*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, (2003).
24. Thomas Szirtes, *Applied dimensional analysis and modeling*, Elsevier Science & Technology Books, 2006.
25. 谈庆明, 量纲分析, 中国科技大学出版社, 2007.
26. Tan Qingming, *Dimensional Analysis*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
27. J.C. Gibbings, *Dimensional Analysis*, Springer-Verlag London Limited, 2011.
28. Yunus A. Çengel and John M. Cimbala, *Fluid mechanics fundamentals and applications*, Tata McGraw Hill Education Private, 2010. item 赵凯华《定性与半定量物理学》, 高等教育出版社, 2008.

CHAPTER 2

从点源强爆炸开始

在量纲分析发展历史上一个特别有名的案例，是二次世界大战期间英国力学大师G.I.Taylor的点源强爆炸研究，他发现了冲击波球面半径与时间的 $2/5$ 成正比的规律，并从照片预测了世界第一颗原子弹的当量，曾引起很大的国际社会反响，害得美国要调查是否有洩密事件。这个问题的解决展示了量纲分析解决复杂问题的强大能力。

在二战的困难时期，1940年英国著名科学家George Thomson邀请G.I.Taylor参加一个工作午餐，Thomson是刚成立的英国铀军事应用委员会的主席，他告诉Taylor英国要制造一种利用核反应产生巨大能量的炸弹，不过那时还没有使用原子弹这个名词。

传统炸弹的机械效能，是通过在有限的空间里短时释放大量高温高压气体获得的。而对于这种新型炸弹，当时的问题是希望了解这种在极端聚焦的没有伴随气体的点源强爆炸的机械效能是否与传统的炸弹类似[49][50][51]。

就在他们这次讨论这个问题之前，英国收到美国著名爆炸专家G.Kistiakovsky¹的报告，他认为即便这种炸弹能爆炸威力也没有期望的那么大的威力。到底情况如何需要尽快研究，R.W. Clark在The Birth of the Bomb一书中指出，当时他们认为全英国只有一个人可以解决这个问题，这个人就是剑桥大学的G.I. Taylor教授。

对于这个科学问题，Taylor思考和计算空气在瞬间爆炸产生的运动和压力。他认为爆炸会产生一个热冲击波，即一个点源强爆炸瞬间释放巨大但有限的能量 E ，

¹G.K.出生与乌克兰基辅，哈佛大学教授，曾领导研制第一颗原子弹内爆点火的爆炸镜头explosive lens.

将对其周围的空气进行急剧的压缩和加温，并以超过声速的球形冲击波向外急速膨胀。

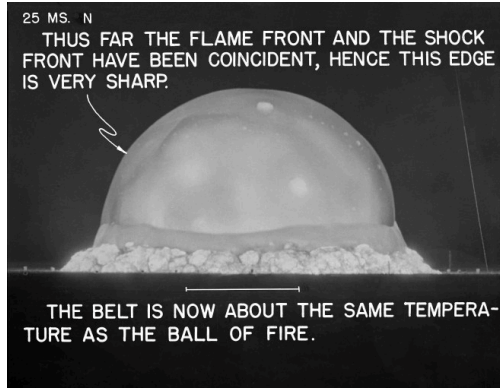


Figure 2.1 原子弹爆炸的球形冲击波

他列出了问题的流体力学偏微分方程组，发现这个方程组是非线性的，当时无法求解，怎么办？这时Taylor想到借助量纲分析这个有力工具来研究这个问题。

设空气绝热系数 γ (表征空气的可压缩性，无量纲)，在爆炸时间 t 时球形冲击波的波阵面半径是 R ，波阵面相当于一个球形界面，内部是超热的火球，外面是正常大气其密度为 ρ_0 压强比球内压强小几个数量级可以忽略不计。这样，这个问题就简化成一个只有5个参量的问题，即希望知道球形冲击波的波阵面的半径

$$R = f(E, \gamma, \rho_0, t) \tag{2.1}$$

这里的符号 f 只代表是一种函数关系，不是具体的一个函数。下面使用量纲分析来研究一下这些量之间的关系情况。

这里有 $n = 5$ 个参量见表2，基本量纲有质量 m ，长度 L 和时间 t ,即 $j = 3$ 。

Table 2.1 点源强爆炸参量的量纲

R	E	γ	ρ_0	t
L	mL^2t^{-2}	1	mL^{-3}	t

根据 π 定理，可以构造出 $k = n - 3 = 2$ 个无量纲的 Π 。取 E, t, ρ_0 为重复变量，有关系

$$\Pi_1 = RE^a \rho_0^b t^c, \tag{2.2}$$

$$\Pi_2 = \gamma E^\alpha \rho_0^\beta t^\lambda. \tag{2.3}$$

由于 γ 是无量纲量，所以 $\alpha = \beta = \lambda = 0$ ，即 $\Pi_2 = \gamma$ 。

对于 Π_1 ，有

$$\Pi_1 = [L][mL^2t^{-2}]^a [mL^{-3}]^b [t]^c = L^0 m^0 t^0. \tag{2.4}$$

可得到幂次数为

$$a = -1/5, b = 1/5, c = -2/5, \tag{2.5}$$

这样就得到 Π_1

$$\Pi_1 = RE^{-1/5} \rho_0^{1/5} t^{-2/5}, \quad (2.6)$$

根据量纲分析理论, 就有关系 $\Pi_1 = S(\Pi_2)$, 即

$$RE^{-1/5} \rho_0^{1/5} t^{-2/5} = S(\gamma), \quad (2.7)$$

其中 $S(\gamma)$ 是常数, 所以就得到球形冲击波的波阵面的半径

$$R = S(\gamma) E^{1/5} \rho_0^{-1/5} t^{2/5}. \quad (2.8)$$

以上就是Taylor的时间 $2/5$ 幂次律, 冲击波的波阵面半径是时间的 $2/5$ 幂次方, 后来计算确定 $S(\gamma) \approx 1.033$ 。

从上式可得球形冲击波的波阵面上的速度

$$v(t) = 2/5 S(\gamma) E^{1/5} \rho_0^{-1/5} t^{-3/5}. \quad (2.9)$$

可见球形冲击波的波阵面上的速度是变化的, 并且随时间的增大而衰减, 当时间很大时速度趋于零。

球形冲击波的波阵面上的加速度

$$a(t) = -6/25 S(\gamma) E^{1/5} \rho_0^{-1/5} t^{-8/5}. \quad (2.10)$$

球形冲击波的波阵面上的加速度是变化的, 是加速度冲击波, 也随时间增大而衰减。

球形冲击波的波阵面后面的压强

$$p(t) = C(\gamma) E^{2/5} \rho_0^{3/5} t^{-6/5}. \quad (2.11)$$

球形冲击波的波阵面上的压强, 在爆炸中心附件非常大, 并随时间迅速衰减。

到这里量纲分析的介绍本来可以结束, 但与此有关的故事在科学技术史上也有一定的意义在此顺便介绍。故事是这样的, 1941年6月27日Taylor给英国有关机构提交了报告。当时参加美国原子弹Manhattan工程的大科学家John von Neumann也研究同一个问题, 在提交报告前他在周末检查报告中的168个公式, 于1941年6月30日(星期一)提交给Los Alamos实验室[?], 比Taylor晚了3天!

由于保密的原因, 当时以上两个报告当时都没有公布。Taylor在1950年才容许发表其研究成果, Von Neumann的结果在1947年发表在Los Alamos的Blast Wave报告第二章中[83]。

同一个问题, 苏联参加原子弹研究的L.I. Sedov也进行过独立研究, 结果没有保密而是于1946年发表在公开的学报上[84]。

在Taylor(1950)的第二篇论文中[51], 他利用1947年美国公开发表的原子弹爆炸火球照片(见图2.2), 从中测量出时间和半径, 用公式 $E = [S(\gamma)]^{-5} \rho_0 R^5 t^{-2}$ 计算预测了美国第一颗原子弹的爆炸当量是

$$E = 7.19 \times 10^{13} J \approx 1.7 \text{万吨TNT当量}. \quad (2.12)$$

据文献上介绍, 预测结果发布后很让美国政府难堪, 虽然爆炸照片已经公开了, 但这个爆炸当量当时是高度绝密的参数。提取照片的数据利用量纲分析公式预测原子弹的当量是Taylor的一大贡献, 得到了超出科学界的巨大社会效果, 所以Taylor的结果特别有名。

怎么连公式都不用, Taylor就解决了这个问题? 太神奇了! 那么, 量纲分析到底包括哪些内容, 如果使用它来解决科学和工程中的问题? 下面就系统介绍量纲分析的理论。

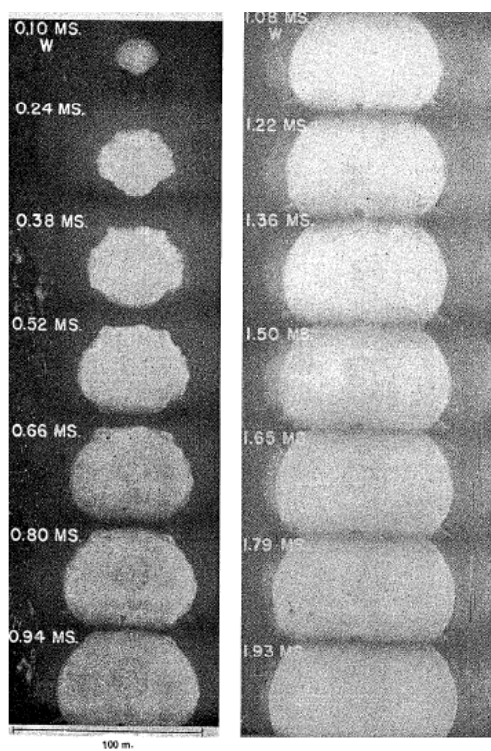


Figure 2.2 世界第一颗原子弹Trinity从0.1msec至1.93msec爆炸火球的照片

CHAPTER 3

量纲分析的基本概念和II定理

作为一门科学，量纲分析有它的核心概念和定理，理解它们对于灵活使用这个分析问题的关键非常重要。核心内容主要有基本量纲单位，量纲幂次定理，量纲一致性原理和Buckingham II定理。

3.1 量纲和基本单位

任何物理量都有量纲或单位，该物理量的大小就是这个单位多数倍，即一个标量乘这个单位。如长度 $10m$ ，其中米是度量这个长度的单位，而10是这个长度和“ m ”所表示的单位长度的比例。这里很明显，用来度量这个物理量的单位和这个物理量本身一定是同一类型的量，或者说，这些量的量纲是相同的。长度的量纲我们用 L 来表示，而不特别说明具体是用长度的米，厘米还是毫米，只要是长度量纲就行。

当然也有一些量是没有量纲，我们就称其为“无量纲”量，如角度，或一些导出的量。

物理世界千变万化，看起来非常复杂，但可以庆幸的是，基本的物理量纲单位一共只要7个！所以我们有结论：

Theorem 3.1 基本的物理量纲单位一共只要7个；所有其他的物理量都是其组合的导出单位¹。

¹All nonprimary dimensions can be formed by some combination of the seven primary dimensions.

从一个问题涉及基本物理单位的个数多少基本可以预测这个问题的复杂程度，当然越多越复杂，但最多就是7个。近几年来，科学界比较关注的多物理问题从本质上看就是它们的问题多用了几个基本物理量。

比如，纯力学类问题，只会涉及3个基本量（质量，长度和时间），如果考虑温度变化的热力学过程就需要加上基本量温度。

Table 3.1 基本物理量量纲和国际SI单位

量纲Dimension	量纲Symbol	SI单位
质量	m	$kg(kilogram)^a$
长度	L	$m(meter)^b$
时间	t	$s(second)^c$
热力学温度	T	$K(kelvin)^d$
电流	I	$A(ampere)^e$
光强	C	$cd(candela)^f$
物质的量	N	$mol(mole)^g$

^a光在真空中于1/299792458秒内行进的距离定义为1公尺。

^b存放于法国巴黎国际度量衡局的「国际公斤原器」定义为1公斤。

^c铯133原子基态的两个超精细能级间跃迁对应辐射的9,192,631,770个週期的持续时间定义为1秒。

^d水的三相点与绝对零度相差的1/273.16定义为1开尔文。

^e在真空中相距为1米的两根无限长平行直导线，通以相等的恒定电流，当每米导线上所受作用力为 $2 \times 10^{-7} N$ 时，各导线上的电流为1安培。

^f给定一个频率为 $540.0154 \times 10^{12} Hz$ 的单色辐射光源（黄绿色可见光）与一个方向，且该辐射源在该方向的辐射强度为1/683 W/sr，则该辐射源在该方向的发光强度为1烛光。

^g所含基本微粒个数与0.012公斤碳-12中所含原子个数相等的一系统物质的量定义为1莫耳。

EXAMPLE 3.1 液体的表面张力的量纲

表面张力²

一些昆虫如水黽可以利用表面张力在水面上爬行，非常扁的物体如铝质或镍质的钱币、剃须刀片或铝膜也可以通过表面张力浮在水面上。生活中其他表面张力的例子：水滴形成圆球状，针会浮在水面，荷叶上的水滴成圆球状。在表面张力高的情况下水不易浸湿物体，还会从物体表面反弹。洗衣粉的作用之一就是降低水的表面张力。

表面张力 σ_s 的量纲是：

$$\sigma_s = \frac{\text{force}}{\text{length}} = \frac{mL/t^2}{L} = m/t^2 = mt^{-2}. \quad (3.1)$$

研究液体的表面张力对于许多学科特别重要，如对于材料和生物技术。现在说的不需要洗的衣服，就是希望开发出一种超疏水性材料。

²广义地所有两种不同物态的物质之间界面上的张力被称为表面张力。在材料科学里，表面张力也称为表面应力和表面自由能。1629年表面张力这个概念第一次出现，托马斯·杨在1805年、皮埃尔-西蒙·拉普拉斯在1806年、西莫恩·德尼·泊松在1830年及约瑟夫·普拉泰奥从1842年到1868年对表面张力的理论做出巨大贡献。

用分子力解释：液体的内聚力是形成表面张力的原因。在液体内部，每个分子都在每个方向都受到邻近分子的吸引力（也包括排斥力），因此，液体内部分子受到的分子力合力为零。然而，在液体与气体的分界面上的液体分子在各个方向受到的引力是不均衡的，造成表面层中的分子受到指向液体内部的吸引力，并且有一些分子被“拉”到液体内部。因此，液体会有一种缩小液面面积的趋势，在宏观上的表现即为表面张力现象。

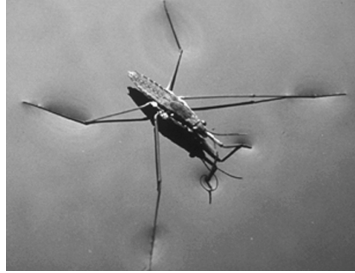


Figure 3.1 水面上爬行(图取自Yunus A. Fluid mechanics,2010).

3.2 量纲的幂次定律

量纲是物理量的种类属性，物理量的量纲反映该物理量随基本量的单位变化而变化的倍数。物理量的量纲如何来表达，它一般是什么形式？在力学系统中，基本量纲有3个，长度L, 质量m 和时间t, 这个系统中的任何的物理量Y都可以表示成

$$Y = L^a m^b t^c \quad (3.2)$$

其中 a, b, c 为实数。

一个无量纲的纯数A也可以这样表达，只是其幂次都为零，即

$$A = L^0 m^0 t^0$$

其实这个结果是一般性的。一个问题的基本量纲一旦确定，其中的任何物理量都可以表达成基本量纲的幂次形式，

Theorem 3.2 (物理量纲的幂次形式定律) 任何物理量的量纲公式都是基本量纲幂次单项式的形式。

这个定律可以分这样几步来说明：

(1) 比如对应于一个物理量X的大小是x原始单位系是A，所以有 $X=xU$ 。

(2) 如果将原始单位系A改变（放大和缩小）一个倍数 λ 得到一个新单位B, 从而有 $X=yB$ ，显然由于单位改变了，在这个新单位B中的大小也改变成y。

我们知道，单位改变不改变物理量本身只改变其与单位的比例大小，所以 $X = xA = yB$ ，即

$$\frac{y}{x} = \frac{A}{B}$$

但单位B是原来单位A改变 λ 倍得来， $\frac{y}{x}$ 一定取决于改变的倍数 λ ，所以应该是 λ 的函数，即

$$\frac{y}{x} = f(\lambda)$$

(3) 如从原始单位系改变 β 倍到另一个单位系C, 从而有 $X = zC = xA = yB$, 显然从原始单位系A变到单位系C, 有关系

$$\frac{z}{x} = \frac{C}{A} = f(\beta)$$

这样就有关系

$$\frac{z/y}{x} = z/y = C/B = f(\beta)/f(\lambda)$$

当然, 单位系C也可以从单位系B改变得到, 不过改变的倍数是 β/λ , 从而有

$$\frac{z}{y} = \frac{C}{B} = f(\beta/\lambda)$$

(4) 现在来取得函数 $f(\cdot)$ 的具体形式。比较以上的结果, 就有

$$\frac{z}{y} = f(\beta)/f(\lambda) = f(\beta/\lambda)$$

以上两边对 β 微分, 并令 $\beta = \lambda = \alpha$, 得

$$\frac{1}{f(\alpha)} \frac{df}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha} \frac{df(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\beta/\lambda=1}$$

因为 $\frac{df(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\beta/\lambda=1}$ 是常数, 取成 m 。以上对 α 积分, 得

$$f(\alpha) = C\alpha^m$$

对于 $\alpha = 1$ 即基本单位不变时, 显然 $f(\alpha) = 1$, 所以 $C=1$; 因此 f 的形式,

$$f(\alpha) = \alpha^m, \quad (3.3)$$

与之对应的量纲就是

$$X = U^m. \quad (3.4)$$

这是对一个量纲, 如同时有几个量纲, 就是几个幂次项的乘积。

如对力学L-m-t系统, 其中的力F的量纲就是

$$F = m^1 L^1 t^{-2}.$$

3.3 量纲一致性原理

古话说, 苹果梨不能相加。就是说, 不同的食物是不能加加的, 或者说, 量纲不同的物理量是不能相加的。实际上, 相加后你也不知道会得到什么量, 比如质量+时间=?

Theorem 3.3 (量纲一致性原理): 每个在公式中相加的量其量纲必须一致³。

例如, Einstein公式, $E = mc^2$, 量纲关系是 $mL^2t^{-2} = m(L/t)^2$ 。

³The law of dimensional homogeneity: Every additive term in an equation must have the same dimensions.

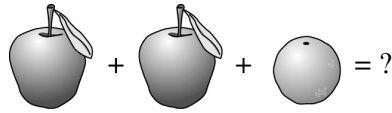


Figure 3.2 不同性质的东西不能相加.

如果在推导公式时发现某些项的量纲之间不同，那么一定是推导过程有误，必须保证每项的量纲要一致。

与量纲一致性原理相关的一个原理是说描写真实世界的物理定律中的物理量与测量这些物理量的单位无关⁴。比如力学的Newton定律 $F = ma$ 中的质量可以使用kg，也可以使用g或mg，不管什么用单位公式都应该成立。

3.4 Buckingham II定理

1914年Buckingham发表一篇有关量纲分析的重要定理⁵，由于在论文中的无量纲使用希腊大写 Π ，1922年被美国学者P.W.Bridgman⁶在其专著《Dimensional Analysis》⁷中命名为Buckingham II定理。这部书是Bridgman在哈佛大学给研究生的5次讲座基础上整理而成，可能是世界第一部量纲分析专著，也可能是量纲分析理论以后没有什么变化的缘故，从现代的角度看这部书完全一点都不过时，多次再版发行，不愧为是一步名著。我希望你们可以来拜读它，把你的量纲分析知识直接建立在大师的智慧基础上。Bridgman 1946年由于高压物理的研究获得诺贝尔物理学奖。

有关Buckingham II定理，也有俄罗斯学者Riabouchinsky⁸于1911年独立发现，而且还早几年。

Theorem 3.4 (Buckingham II定理) :

设有一个物理关系， $f(s_1, s_2, s_3, \dots, s_n) = 0$ ，是有一组量纲不同的物理量 $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ 所组成。设在这组物理量中有 j 个量纲是相互独立的^a，并且选作为基本单位量纲，这个物理关系一定可以用 $k=n-j$ 个无量纲量 $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k$ 完全表示出来，即

$$f(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_k) = 0,$$

⁴A related principle is that any physical law that accurately describes the real world must be independent of the units used to measure the physical variables

⁵E. Buckingham, On physically similar systems: illustration of the use of dimensional equations, Phys. Rev., Vol.4, pp.345 - 376, 1914.

⁶Percy Williams Bridgman (21 April 1882 - 20 August 1961) was an American physicist who won the 1946 Nobel Prize in Physics for his work on the physics of high pressures. He also wrote extensively on the scientific method and on other aspects of the philosophy of science.

⁷P.W. Bridgman, Dimensional Analysis. Rev. Ed., Yale University Press, New Haven, 1922.

⁸Dimitri Pavlovitch Riabouchinsky (1882 - 1962) was a Russian French fluid dynamicist noted for his discovery of the Riabouchinsky solid technique. He also independently discovered equivalent results to the Buckingham Pi Theorem in 1911.

其中 Π_i 由 $k=n-j$ 个 s_i 方程构成, $\Pi_i = s_1^{a_1} s_2^{a_2} \cdots s_n^{a_n}$.

^a这里的 j 不能是任意多, 基本量纲单位只要7个, 所以 j 的最大值是7, 一般情况下 $j \leq 7$.

Buckingham Π定理还可以有以下简单表达。

Theorem 3.5 (Buckingham Π定理): 设有一个物理问题中有 $N = n + 1$ 个变量, 其中 n 个自变量 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, 一个因变量 y , 如果问题有 j 个基本量纲, 那么就一定可以有 $N - j = k$ 个无量纲变量 $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k$, 且有

$$f(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_k) = 0.$$

从以上的Buckingham Π定理, 可能给人的感觉这个量纲分析很困难。其实只要对问题有比较好的了解, 使用下面的6步法, 就可以较快的得到你问题的尺度律或相似关系。

CHAPTER 4

量纲分析的六步方法和难点

4.1 量纲分析的6步法

Buckingham Π 定理给出了构造无量纲量 Π 的一般方法，在此基础上人们总结出一个可能是最简单的6步方法，有时称为重复变量方法(method of repeating variables)¹.

应当指出，在Step 3中有“猜测 j 值”，这就给人一种不确定的感觉，从而使量纲分析有些随意性，由于这个原因，量纲分析也的确有些技巧或“艺术”成分。一个复杂问题通过量纲分析解决后往往会给人一种智慧的冲击和享受，所以好的量纲分析结果一般都是科学大师的作品。

4.2 量纲分析的难点

虽然Buckingham Π 定理给出了构造无量纲量 Π 的一般方法，但人们在使用中会感到一定的困难²。

(1) 如何确定问题的物理量，就是参量 n 的问题。在一个物理问题中究竟那些是必要的物理量，有时很难决定，特别是新的科学问题，问题本身可能还没有确定。多余地加进一些关系不大的物理量，常常给我们增加很多分析的复杂性，但过

¹Yunus A. Cengel and John M. Cimbala, Fluid mechanics fundamentals and applications, Tata McGraw Hill Education Private, 2010.

²钱伟长，应用数学，安徽科学技术出版社，1993

Table 4.1 量纲分析的6步法

步骤	操作
Step 1	列出问题所有的参量(有量纲的变量, 无量纲变量和常数)并计算其个数.包括因变量问题设一共有n个参量, 确定任何在此列出的参量都是独立的, 不能用其他量表示)。
Step 2	列出所有n个参量量纲中的基本量纲(注意基本量纲最多只有7个!)。
Step 3	猜测j值(j又称reduction减少值,最多只有7个)。作为第一次猜测, 取j值对于问题中基本量纲的个数, 即Step 2中的基本量纲数。根据Buckingham II 定理, 可以构造k=n-j个无量纲量 Π 。如果得到的结果有问题, 需要改变j值再重复推导。
Step 4	重复使用j个基本量纲, 用于构造每一个无量纲量 Π , 这样的无量纲量 Π 一共有k=n-j个。
Step 5	把所得的所有k个无量纲量 Π 列出, 必要时适当整理无量纲量 Π 称为科学界已经命名的无量纲量。
Step 6	验证所有的无量纲量 Π , 并写出问题的最终量纲关系。由于这种关系都是以幂次方形式表现, 所以也称为幂次率(power law), 尺度律(scaling law)或相似律(similarity law)。

少的物理量显然不能解决问题。这里就需要有高深的科学修养, 具体问题具体分析, 这个地方就有“技巧”和“艺术”的成分。

(2) 如何决定作为基本量纲的物理量, 就是j值的问题。在n个参量中, 选j个量作为基本量, 这时到底选那个量作为基本量, 就是一个很关键的问题, 显然不同的选择, 会构造出不同的一组无量纲量 Π 。这个重要的问题可惜没有一个标准和规律可循, 从而不同人会得到不同的结果。这就有结果好坏的问题, 是量纲分析中难度系数最大的问题。

(3) 无量纲量 Π 不是唯一的, 其相互的乘除和幂次都是无量纲量! 这时需要把导出的无量纲量与历史上科学界已经命名的参量比较, 并改写成该量的传统表示。

以上是量纲分析学习和使用时的难点, 必须通过实践训练才能掌握好这个工具。学术上讲, 其中的一些问题只有通过相似论来解决。但是, 应用相似论, 就要求使用物理问题的基本方程。在很多实际问题中, 问题的基本方程常常还步很明白。在这些没有基本方程的复杂问题中, 量纲分析就比较有用。所以, 如果你研究的问题非常复杂, 还没有搞的太明白, 最好不要贸然开始, 建议先用量纲分析试试问题的深浅。

PROBLEMS

4.1 请列出你的学科中知道的物理量的量纲。

4.2 一个微信中的笑话, 请审查这样的“白日做梦”能实现吗?

$$1分=0.01元=0.1元 \times 0.1元=1角 \times 1角=10分 \times 10分=100分=1元.$$

4.3 利用量纲一致性原理, 从Newton万有引力定律 $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ 导出G的量纲, 其中G即是万有引力常数。

CHAPTER 5

量纲分析的教学例题

学习获知识，应用长才干。基础知识只有通过反复实践才能达到举一反三熟能生巧的境界。

由于量纲分析的基础性，它的应用范围可以说涉及全部科学技术领域，甚至经济金融领域。如果你能掌握好这门“手艺”，你会感到能力非常强大，对问题规律性把握就会上一个层次。下面让我们一起来感受量纲分析的强大能力！

5.1 肥皂泡中压强

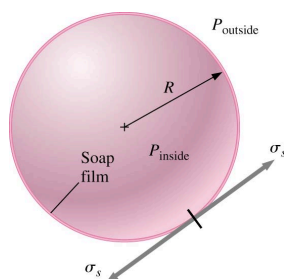


Figure 5.1 肥皂泡中压强.(图取自 Yunus A. Fluid mechanics,2010)

肥皂泡¹是非常薄的形成一个带虹彩表面的空心形体的肥皂水的膜。肥皂泡的存在时间通常很短，它们会因触碰其它物体或维持于空气中太久而破裂（地心吸力令肥皂泡上方的膜变薄）。

肥皂泡的存在是因为液体（通常是水）的表面层有一种特定的表面张力，它导致该层的行为像弹性膜。一个常见误解是以为肥皂增加了水的表面张力。实际上肥皂做了相反的事情，它将张力减少到大约是纯水的三分之一。肥皂不增强泡泡，它只是稳定它们，通过一种称为Marangoni效应的作用。随着肥皂膜的拉伸，肥皂的密度减小，使得表面张力增加。

肥皂泡也是极小曲面问题的物理诠释，这是数学和自然科学在过去15年中有很多研究的一个领域。例如，从1884年就已知球形肥皂泡是包容给定体积的air的极小面积的办法。

假设肥皂泡的半径为R,肥皂泡的面张力 σ_s ，内压是 P_{inside} ,外压是 $P_{outside}$ ，这样压差就是 $\Delta P = P_{inside} - P_{outside}$ ，现在的问题是求压差 ΔP 。(这里不考虑重力作用，温度变化等因素，建议你们考虑这些重新推导)。

Step 1: 列出问题所有的参量(有量纲的变量，无量纲变量和常数)并计算其个数.包括因变量问题一共有n个参量。

对于这个问题，我们有3个参量R, ΔP 和 σ_s ，即n=3。

我们的问题是要确定关系

$$\Delta P = f(R, \sigma_s), \quad (5.1)$$

Step 2: 列出所有n个参量的基本量纲（注意最多只有7个！）。

Table 5.1 参量的基本量纲

ΔP	R	σ_s
$m^1 L^{-1} t^{-2}$	L^1	$m^1 t^{-2}$

Step 3: 这个问题的基本量纲有L,m,t共3个。作为第一次猜测，取j值等于问题中基本量纲的个数，即j=3。这样我们就有 $k=n-j=3-3=0$ 个无量纲量 Π ,怎么会没有一个 Π ? 一定是有什么不妥。由于j一定要小于n=3,第二次取j=2.这样就会有

$$k = n - j = 3 - 2 = 1$$

意味着将有一个无量纲量 Π 。

Step 4: 重复使用j个基本量纲，用于构造每一个无量纲量 Π 。

这个问题的重复参量个数j=2，在这里取这2个重复参量为R和 σ_s ，因为 ΔP 是因变量不作为重复参量。

Step 5: 把所得的所有k个无量纲量 Π 列出，必要时适当整理无量纲量 Π 称为科学界已经命名的无量纲量。

¹Isenberg, Cyril (1992) The Science of Soap Films and Soap Bubbles ; (Dover) ISBN 0-486-26960-4.

我们把 ΔP 与重复参量做一个乘积，但重复参量的幂次为待定。

$$\Pi_1 = \Delta P R^a \sigma_s^b, \quad (5.2)$$

把表中的参量基本量纲带入上式，并注意 Π 是无量纲量，得到

$$\Pi_1 = m^0 L^0 t^0 = \Delta P R^a \sigma_s^b = m^1 L^{-1} t^{-2} L^a (m^1 t^{-2})^b m^1 L^{-1+a} t^{-2-2b} = m^0 L^0 t^0, \quad (5.3)$$

合并同类项，两边同一量的幂次必须相等，有

对于时间 t : $0 = -2 - 2b$, 得到 $b = -1$,

对于质量 m : $0 = 1 + b$, 得到 $b = -1$,

对于长度 L : $0 = -1 + a$, 得到 $a = 1$,

把确定的 a 和 b 带入到 Π , 得到这个问题 Π

$$\Pi_1 = \Delta P R / \sigma_s, \quad (5.4)$$

Step 6: 验证所有的无量纲量 Π ，并写出问题的最终量纲关系。

这个问题只有一个 Π ，它不是其他 Π 的函数，那只有有一种可能，是个常量！太好了，科学界最喜欢常量和不变量之类的事。

$$\Pi_1 = \Delta P R (\sigma_s)^{-1} f(\text{nothing}) = \text{constant} = C, \quad (5.5)$$

得到压差

$$\Delta P = C \sigma_s / R. \quad (5.6)$$

讨论：对于这个问题，我们没有建立问题的方程更没有求解，得到了只有一个待定常数的压差公式，多么神奇！当然，量纲分析不能完全确定全部，待定常数必须通过其他方法（如试验）确定。

对于这个问题，常数 $C=4$ 。正确的解是

$$\Delta P = 4 \sigma_s / R. \quad (5.7)$$

5.2 机翼的升力

当流体流经一个物体的表面时会对其产生一个表面力，这个力的垂直于流体流向的分力为升力，与之相对的则是方向平行于流体流向的阻力。如果流体是空气时，它产生的升力便叫做空气动力。航空器要想升到空中，必须能产生能克服自身重力的升力。

升力，就是向上的力。从翼型流线谱中看出：相对气流稳定而连续地流过翼型时，上下表面的流线情况不同。上表面流线是弯曲的，其气会产生负压、因此压力小；而下表面流线较平直的，其气流不会产生负压，压力较大。因此，产生了上下压力差。这个压力差就是空气动力，它垂直流速方向的分力就是升力 F_L 。流过各个剖面升力总合就是机翼的升力。升力维持飞机在空中飞行。

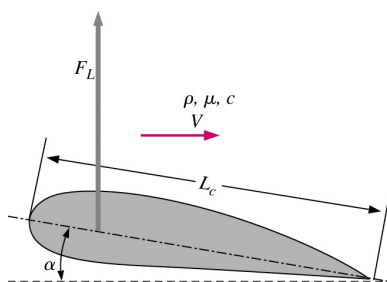


Figure 5.2 机翼的升力.(图取自Yunus A. Fluid mechanics,2010)

升力取决于飞行的速度 V ，空气的密度 ρ ，空气的黏性 μ ，空气的声速 c ，机翼的特征尺寸 L_c ，以及物体与气流的夹角（攻角 α ）。

Step 1: 列出问题所有的参量(有量纲的变量，无量纲变量和常数)并计算其个数.包括因变量问题设一共有 n 个参量。

对于这个问题，我们有7个参量,即 $n=7$ 。

我们的问题是需要确定关系

$$F_L = f(V, L_c, \rho, \mu, c, \alpha) \tag{5.8}$$

Step 2: 列出所有 n 个参量的基本量纲（注意最多只有7个！）。

Table 5.2 参量的基本量纲

F_L	V	L_c	ρ	μ	c	α
$m^1 L^{-1} t^{-2}$	$L^1 t^{-1}$	L^1	$m^1 L^{-3}$	$M^1 L^{-1} t^{-1}$	$L^1 t^{-1}$	1

Step 3: 这个问题的基本量纲有 L, m, t 共3个。作为第一次猜测，取 j 值等于问题中基本量纲的个数，即 $j=3$ 。这样我们就有 $k=n-j=7-3=4$ 个无量纲量 Π ,这样就会有 $k = 4$ 个无量纲量 Π 。

Step 4: j 值是3，我们要从7个参量中选择3个作为问题的重复参量，无量纲的攻角不选，因变量 F_L 不选，粘性系数 μ 已经包含了所有的基本量（ L, m, t ），我们取 L_c, V, ρ 作为重复参量。

3个重复参量： L_c, V, ρ

Step 5: 把所得的所有 k 个无量纲量 Π 列出，必要时适当整理无量纲量 Π 称为科学界已经命名的无量纲量。

我们把 F_L 与重复参量做一个乘积，但重复参量的幂次为待定。

$$\Pi_1 = F_L V^a L_c^b \rho^c \rightarrow \Pi_1 = m^1 L^1 t^{-2} (L^1 t^{-1})^a (L^1)^b (m^1 L^{-3})^c = m^0 L^0 t^0$$

把表中的参量基本量纲带入到上式，并注意 Π 是无量纲量。合并同类项，两边同一量的幂次必须相等，得到待定常数 $a = -2, b = -2, c = -1$

把确定的 a 和 b 带入到 Π ，得到这个问题 Π

$$\Pi_1 = F_L / (\rho V^2 L_c^2)$$

其中的 L_c^2 就是机翼的面积量纲，可以用面积 A 代替， Π_1 改写成传统的升力系数 C_L

$$\Pi_{1,modified} = F_L / (\frac{1}{2}(\rho V^2 A)) = C_L$$

类似，我们用空气粘性系数 μ 代替 F_L ，就可以得到 Π_2

$$\Pi_2 = \mu V^a L_c^b \rho^c \rightarrow \Pi_1 = m^1 L^1 t^{-1} (L^1 t^{-1})^a (L^1)^b (m^1 L^{-3})^c = m^0 L^0 t^0$$

可以得到另一组 $a=-1, b=-1, c=-1$ ，所以

$$\Pi_2 = \mu / (\rho V L_c)$$

这个 Π_2 就是Reynolds常数 Re 的倒数，可以修改成传统表示

$$\Pi_{2,modified} = (\rho V L_c) / \mu = Re$$

同样可以得到第3个 Π_3 ，就是飞行速度与当地声速的比值，传统称为Mach数， Ma

$$\Pi_3 = V/c = Ma$$

第4个 Π_4 就是攻角 α

Step 6: 验证所有的无量纲量 Π ，并写出问题的最终量纲关系。

$$\Pi_{1,modified} = f(\Pi_{2,modified}, \Pi_3, \Pi_4), \quad (5.9)$$

得到升力系数为

$$C_L = F_L / (\frac{1}{2}(\rho V^2 A)) = f(Re, Ma, \alpha). \quad (5.10)$$

讨论：对于这个问题，我们没有建立问题的方程更没有求解，得到了机翼升力系数与Reynolds数，Mach数和攻角的关系公式，是不是很神奇！

当然，量纲分析不能完全确定全部，待定常数 $f(Re, Ma, \alpha)$ 必须通过其他方法（如试验）确定。

对于速度 V 很大的极限情况，可认为 $Re \rightarrow \infty$ 和 $Ma \rightarrow \infty$ ，这样 $f(Re, Ma, \alpha)$ 就只是攻角 α 的函数，即

$$C_L|_{V \rightarrow \infty} = F_L / (\frac{1}{2}(\rho V^2 A)) = f(\alpha). \quad (5.11)$$

这就是高超声速飞行器的Newton（牛顿）升力系数，可以确定为 $C_L = f(\alpha) = 2 \sin^2 \alpha$ ，也称牛顿sin平方定律²。

现在经常说的一小时打遍全球的飞行器就是这种高超声速飞行器（Scramjet）³，它主要是通过产生激波来获得升力。这种飞行器的原理主要是现代力学奠基人Prandtl的学生K.Oswatitsch⁴提出的，后来技术上首次由美国实现，它将对未来的军事形态产生巨大影响。



Figure 5.3 高超声速飞行器.

5.3 管中的流动摩擦阻力

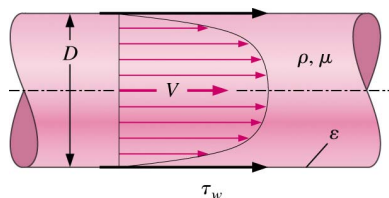


Figure 5.4 管中的流动摩擦阻力.(图取自Yunus A. Fluid mechanics,2010)

设一个园管的直径为 D , 不完全光滑有粗糙度 ε (长度量纲), 流动速度 V , 流体的密度是 ρ , 粘性系数 μ , 摩擦剪切应力 τ_w (是摩擦阻力的来源), 问题是需要确定 τ_w 与

²Anderson, John. Hypersonic and High-Temperature Gas Dynamics Second Edition. AIAA Education Series. 2006. ISBN 1-56347-780-7.

³超音速燃烧冲压发动机（Supersonic combustion Ramjet, 缩写为Scramjet）是一种进气流速超过音速的航空用冲压发动机，属进气式喷射发动机的一类。超音速燃烧冲压发动机与一般的冲压发动机虽然都被使用在超音速飞行器上，但其关键的差异在于冲压发动机的进气在实际进入燃烧室之前，需经过适当的导流减速到次音速，但超音速燃烧冲压发动机的进气仍可保持在超音速状态，因此可达到更高的飞行速度。目前人类曾制造出、飞行速度最快的进气发动机飞行器——美国航太总署所开发的X-43A极音速无人实验机，就是搭载超音速燃烧冲压发动机作为动力来源。

⁴Klaus Oswatitsch, DVL-Bericht Nr.90, 1959.

其他量的关系。

Step 1: 列出问题所有的参量(有量纲的变量, 无量纲变量和常数)并计算其个数. 包括因变量问题设一共有 n 个参量。

对于这个问题, 我们有6个参量, 即 $n=6$ 。

我们的问题是需要确定关系

$$\tau_w = f(V, \varepsilon, \rho, \mu, D), \quad (5.12)$$

Step 2: 列出所有 n 个参量的基本量纲 (注意最多只有7个!)。

Table 5.3 参量的基本量纲

τ_w	V	ε	ρ	μ	D
$m^1 L^{-1} t^{-2}$	$L^1 t^{-1}$	L^1	$m^1 L^{-3}$	$M^1 L^{-1} t^{-1}$	L^1

Step 3: 这个问题的基本量纲有 L, m, t 共3个。作为第一次猜测, 取 j 值等于问题中基本量纲的个数, 即 $j=3$ 。这样我们就有 $k=n-j=6-3=3$ 个无量纲量 Π , 这样就会有 $k=3$ 个无量纲量 Π 。

Step 4: j 值是3, 我们要从6个参量中选择3个作为问题的重复参量, 无量纲的攻角不选, 因变量 τ_w 不选, 粘性系数 μ 已经包含了所有的基本量 (L, m, t), 我们取 D, V, ρ 作为重复参量。

3个重复参量: D, V, ρ

Step 5: 把所得的所有 k 个无量纲量 Π 列出, 必要时适当整理无量纲量 Π 称为科学界已经命名的无量纲量。

我们把 τ_w 与重复参量做一个乘积, 但重复参量的幂次为待定。

$$\Pi_1 = \tau_w V^a D^b \rho^c \rightarrow \Pi_1 = m^1 L^1 t^{-2} (L^1 t^{-1})^a (L^1)^b (m^1 L^{-3})^c = m^0 L^0 t^0,$$

把表中的参量基本量纲带入上式, 并注意 Π 是无量纲量, 得到

合并同类项, 两边同一量的幂次必须相等, 得到待定常数 $a = -2, b = -2, c = -1$

把确定的 a 和 b 带入到 Π , 得到这个问题 Π

$$\Pi_1 = \tau_w / (\rho V^2), \quad (5.13)$$

其中的 Π_1 改写成传统的Darcy摩阻因子 f_D

$$\Pi_{1, modified} = 8\tau_w / \left(\frac{1}{2}(\rho V^2 A)\right) = f, \quad (5.14)$$

类似, 我们用空气粘性系数 μ 代替 τ_w , 重复计算就可以得到 Π_2

$$\Pi_2 = \mu V^a V^b \rho^c \rightarrow \Pi_1 = m^1 L^1 t^{-1} (L^1 t^{-1})^a (L^1)^b (m^1 L^{-3})^c = m^0 L^0 t^0$$

可以得到另一组 $a=-1, b=-1, c=-1$, 所以

$$\Pi_2 = \mu / (\rho V L_c)$$

这个 Π_2 就是 Reynolds 常数 Re 的倒数, 可以修改成传统表示

$$\Pi_{2,modified} = (\rho V L_c) / \mu = Re, \quad (5.15)$$

同样可以得到第3个 Π_3 , 就是粗糙度 δ 与管直径的比值, 传统称为粗糙度系数

$$\Pi_3 = \varepsilon / D, \quad (5.16)$$

Step 6: 验证所有的无量纲量 Π , 并写出问题的最终量纲关系。

$$\Pi_{1,modified} = F(\Pi_{2,modified}, \Pi_3), \quad (5.17)$$

得到摩阻因子为

$$f = 8\tau_w / (\rho V^2 A) = F(Re, \varepsilon/D). \quad (5.18)$$

讨论: 对于这个问题, 我们没有建立问题的方程更没有求解, 得到了摩阻因子与粗糙度系数的关系公式, 也很神奇! 当然, 量纲分析不能完全确定全部, 待定常数 $F(Re, \delta/D)$ 必须通过其他方法 (如试验) 确定。

对于粗糙度系数 ε/D 为零的管流, 在层流情况下 $f = 64/Re$; 对于湍流是不同的结果 $f = 0.316Re^{-1/4}$ 。

对于速度 V 很大的极限情况, 可认为 $Re \rightarrow \infty$, 对于这个问题 $F(Re, \delta/D)$ 就只是粗糙度系数 ε/D 函数。如果再完全光滑粗糙度系数为零, 即

$$f|_{V \rightarrow \infty, \delta/D \rightarrow 0} = f(0) = constant = C, \quad (5.19)$$

这时摩阻因子 f_D 是常数! 即有剪切应力

$$\tau_w = C\rho V^2. \quad (5.20)$$

5.4 弹性线在拉紧状态下的振动频率

请使用量纲分析求弹性线在拉紧状态下的振动频率 ω , 设弹性线长度 l , 单位长度的密度 ρ 和线的拉力 F , 这里不考虑抗弯刚度。首先列出4个参量的量纲(表3.5)。

Table 5.4 弹性线的振动频率问题参量的量纲

ω	l	ρ	F
t^{-1}	L	mL^{-1}	mLt^{-2}

这个问题共有4个参量, 3个基本量 m, t, L , 根据量纲分析的 Π 定理, 会有一个独立无量纲 Π 。

$$\Pi = \omega l^a F^b \rho^c. \quad (5.21)$$

把量纲代入，有量纲关系

$$\Pi = t^0 m^0 L^0 = t^{-1} L^a (m L t^{-2})^b (m L^{-1})^c. \quad (5.22)$$

根据量纲齐次定理，有

$$-1 - 2b = 0, \quad b + c = 0, \quad a + b - c = 0. \quad (5.23)$$

得到 $a = 1, b = -1/2, c = 1/2$ ，所以频率为

$$\omega = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{F}{\rho}}. \quad (5.24)$$

这个关系与严格理论及实验的结果是完全一致的。

5.5 单摆的振动周期问题

单摆固定一端，自由端有一质量为 M 的集中质量，摆的长度是 l ，不计摆的质量、变形和空气摩擦阻力，初始方位角是 α 单摆在重力作用下自由摆动，求振动周期 T 。

由于摆动是受重力作用，所以除了以上参量外，还必须考虑重力加速度 g 的影响，这样问题就有 5 个参量的量纲(表 3.6)。

Table 5.5 单摆的振动参量的量纲

T	M	l	α	g
t	m	L	1	$L t^{-2}$

由于初始方位角 α 是无量纲量，就是一个 $\Pi_1 = \alpha$ 。其余只有 3 个有量纲的参量，根据无量纲 Π 定理，只能有一个 Π_2 。这样就得到

$$\Pi_2 = T l^a M^b g^c, \quad (5.25)$$

把量纲代入到上式得到量纲关系

$$\Pi_2 = t L^a m^b (L t^{-2})^c. \quad (5.26)$$

根据量纲齐次定理，有

$$1 - 2c = 0, \quad a + c = 0, \quad b = 0. \quad (5.27)$$

由 Π 定理，这样就有

$$\Pi_2 = T l^{1/2} M^0 g^{1/2} = f(\Pi_1) = f(\alpha). \quad (5.28)$$

其中 $f(\alpha)$ 是初始方位角的函数。

$$T = f(\alpha) \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (5.29)$$

讨论：对于微小振动时 $f(\alpha) \approx f(0) = 2\pi$ 。另外，从周期表达式(5.29)，可以看出，摆动周期与集中质量 M 的大小没有关系，只取决于摆的长度、初始方位角和加速度。

5.6 Rayleigh低速绕流换热问题

这是一个著名的量纲分析例子[40]，曾引起过学术争论[6]。

假设流体没有粘性，来流速度 V 比较小，固体的特征长度是 l ，来流的流体相对于固体有温度差 θ ，流体的热容量参数 c ，流体导热系数是 λ ，现在的问题是：在单位时间里，流体给于固体的容量 Q 有多大？

使用这里的6步方法，首先列出问题中6个参量的量纲表格(温度量纲用 θ 表示)(表3.4)。

Table 5.6 Rayleigh低速绕流换热问题参量的量纲

Q	V	c	λ	θ	l
mL^2t^{-2}	$mL^2t^{-2}\theta^{-1}$	$Lmt^{-3}\theta^{-1}$	θ	$mL^{-1}t^{-1}$	L

这个问题一共有6个参量，4个基本量 m, t, L, θ ，根据 Π 定理，这样就有2个独立的无量纲 Π ，其中一个 $\Pi_1 = Q/(\lambda l \theta)$ 包括 Q ，另一个包括由其他变量组成的无量纲量 $\Pi_2 = lVc/\lambda$ ，这样可以得到问题的量纲关系

$$Q = \lambda l \theta f(lVc/\lambda). \quad (5.30)$$

Rayleigh[40]由此得到2个结论：1. 热量 Q 与温度 θ 成正比；2. 速度 V 和流体的热容量参数 c 不独立对热量 Q 起作用，而是以其乘积组合 Vc 起作用。

CHAPTER 6

量纲分析的应用专题

6.1 破甲弹金属射流的稳定性问题

破甲弹是以具有内衬金属罩空腔的聚能装药爆炸后形成的高速金属射流摧毁坦克等装甲目标，在第二次世界大战期间得到广泛应用，主要用于反坦克武器。破甲弹射流侵彻的理论研究始于二战期间，最具代表性的射流侵彻理论是由G.I. Taylor于20世纪40年代建立的不可压流体理论[48]。Taylor等巧妙地利用不可压流体力学中的Bernoulli方程，建立了射流侵彻深度与射流长度之比和射流与靶板密度比之间的简明而重要的关系，成为了二战后期及战后20-30年破甲弹设计的主要理论依据。但是，Taylor的流体理论存在明显的局限性。该理论指出侵彻深度主要取决于材料的密度，如果射流和靶板密度相同，理论预测的侵彻深度应该与射流长度相等。二战以后，装甲材料的研究取得很大进展，高强度金属、陶瓷等材料的研制成功和应用，大大增强了装甲防御破甲弹的能力，材料强度也起着重要的作用，“矛”与“盾”的关系发生了显著变化。于是，人们对侵彻机理有了一些新的思考，试图探索密度之外其他可能的影响因素。

郑哲敏在工程科学领域有许多的贡献(戴兰宏[52])，他[53][54]及其领导的爆炸力学研究团队与相关兵器部门合作，通过理论分析、模型与现场实验研究，系统地建立了破甲射流侵彻的流体弹塑性理论，阐明了破甲过程的机理，建立了定量、可靠和实用的计算公式。郑哲敏在破甲机理方面的研究成果丰富，主要工作包括：(1) 射流侵彻模型律；(2) 射流准定常侵彻的线性律；(3) 准定常侵彻阶段侵彻速度与射流速度关系；(4) 射流稳定性的控制机理。

对于射流稳定性的控制机理，根据Taylor的射流准定常侵彻理论，聚能射流侵彻深度近似等于射流的长度。大量实验表明，破甲弹形成的高速金属射流飞行过程

中,就在不同的部位发生颈缩失稳,继而被拉断,原来连续完整的射流拉断成许多小段。颈缩,特别是拉断后的射流严重丧失侵彻能力。因此,研究聚能射流颈缩失稳和拉断的规律,揭示这一现象的影响因素和背后控制的物理机制尤为重要。

实际上,聚能射流失稳过程十分复杂,涉及的因素除了射流的强度、惯性之外,在高速段还有外界空气动力影响。聚能射流速度呈现头部大尾部小的特征,飞行中处于拉伸变形状态。如果由于射流表面压力分布存在的扰动使射流的某个截面有所减小,那么它将继续减小下去直至拉断,这是高速段射流失稳断裂的一个基本原因。对于低速段的拉断失稳,郑哲敏巧妙地引入表征射流初始直径和速度梯度(应变率)组合影响的“面积冲量 Ω ”,通过量纲分析,得到了射流颈缩和拉断的位置和时间表达。

从实验观测,可以假设在初始时刻有直径是常数 d_0 的一个沿长度方向上速度呈线性分布的射流,即速度梯度为常数,初始的拉伸应变是 $\dot{\epsilon}_0$ (就是速度梯度),材料密度是 ρ ,材料屈服极限是 Y ,材料的断面收缩率定义是 $\psi = 1 - A_b/A_0$,其中 A_0 为材料变形初始截面积, A_b 是断口处的截面积,是一个无量纲量。由于射流的头部速度比尾部快,这样的速度梯度必然使射流不断拉伸变细,直至发生断裂,问题是要确定断裂时射流的直径 d_b 。

这个问题有6个参量,所以断裂时射流的直径 d_b 应当可以用其他参数表示,即

$$d_b = f(d_0, \dot{\epsilon}_0, \rho, Y, \psi). \quad (6.1)$$

郑哲敏[54]指出,实际 d_0 和 $\dot{\epsilon}_0$ 之间并不相互独立。射流在拉长的过程中,各微元都保持等速运动,射流内压力不高,可以认为密度 ρ 为常数,所以射流速度相差 du_j 的那端微元在运动过程中满足Lagrange质量守恒关系,即有

$$\frac{dm}{du_j} = \pi\rho(d/2)^2 \frac{dl}{du_j} = constant. \quad (6.2)$$

其中, d 是该微元的直径, dm 和 dl 为其质量和长度, dl/du_j 刚好为应变率的倒数 $1/\dot{\epsilon}$ 。所以,表达式(6.2)可以写成

$$\frac{dm}{du_j} = \pi\rho(d/2)^2 \frac{dl}{du_j} = \pi\rho \frac{(d/2)^2}{\dot{\epsilon}_0} = \pi\rho \frac{(d_0/2)^2}{\dot{\epsilon}_0} = \frac{\pi}{4} \rho \frac{d_0^2}{\dot{\epsilon}_0} = constant. \quad (6.3)$$

可见, d_0 和 $\dot{\epsilon}_0$ 通过组合 $d_0^2/\dot{\epsilon}_0$ 发挥作用,引入一个新的物理参量 Ω

$$\Omega = \frac{d_0^2}{\dot{\epsilon}_0}. \quad (6.4)$$

于是,断裂时射流的直径 d_b 表达式(6.1)减少一个参量,变成

$$d_b = f(\Omega, \rho, Y, \psi) \quad (6.5)$$

为了进行量纲分析,下面列出各参量(表6.1)。

Table 6.1 破甲射流稳定性参量的量纲

Y	Ω	ρ	ψ	d_b
$L^{-1}mt^{-2}$	L^2t	mL^{-3}	1	L

共有5各参量,3个基本量,所以有2个 Π ,其中一个 $\Pi_1 = \psi$,另一个是

$$\Pi_2 = d_b \Omega^a \rho^b Y^c. \quad (6.6)$$

把量纲代入得到

$$\Pi_2 = L^0 m^0 t^0 = L(L^2 t)^a (m L^{-3})^b (L^{-1} m t^{-2})^c = L^{1+2a-3b-c} m^{b+c} t^{a-2c} = m^0 L^0 t^0. \quad (6.7)$$

根据量纲其次定理。可以得到

$$1 + 2a - 3b - c = 0, \quad b + c = 0, \quad a - 2c = 0. \quad (6.8)$$

解得

$$a = -1/3, \quad b = 1/6, \quad c = -1/6. \quad (6.9)$$

所以

$$\Pi_2 = d_b \Omega^{-1/3} \rho^{1/6} Y^{-1/6}. \quad (6.10)$$

根据II定理，有问题的量纲关系 $\Pi_2 = f(\Pi_1)$ ，即得到断裂时射流直径 d_b 表达式

$$d_b = f_1(\psi) \left(\Omega \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \right)^{1/3}. \quad (6.11)$$

注意到 Ω 具有面积量纲 $L^2 t$ ，就命名为“面积冲量”。

同样分析，可以得到断裂时间 t_b 的表达式

$$t_b = f_2(\psi) \left(\Omega \frac{\rho}{Y} \right)^{1/3}. \quad (6.12)$$

Crady[55]研究过同样的问题，他不考虑断面收缩率 $\psi = 1 - A_b/A_0$ 的影响，并利用他人的分析数据得到的关系是

$$t_b = \frac{1}{2} \left(\Omega \frac{\rho}{Y} \right)^{1/3}. \quad (6.13)$$

这个结果完全没有待定系数，形式与郑哲敏[54]的结果基本一致，不过郑哲敏公式(6.11)的系数需要由材料的断面收缩率来确定。

应当指出，公式(6.11)中的 $f(\psi)$ 的具体表达式至今还没有确定。对于是否需要考虑断面收缩率 $\psi = 1 - A_b/A_0$ 的影响，有以上两个主要的观点，目前还不能确定那一个表达式更能反映问题的本质，只是从实际运用上看Crady的表达式系数已经完全确定，可以直接使用。不过具体应该如何处理还需要做实验认定。

对于是否需要断面收缩率的作为独立参量的问题，让我们做些进一步的分析。从断面收缩率的定义看 $\psi = 1 - A_b/A_0$ ，假设射流的横截面是圆形的(非圆形也类似)，初始截面积 A_0 和断口处的截面积 A_b 可以表达成

$$A_0 = \pi \left(\frac{d_0}{2} \right)^2, \quad A_b = \pi \left(\frac{d_b}{2} \right)^2. \quad (6.14)$$

所以，断面收缩率与断口直径的关系是

$$\psi = 1 - A_b/A_0 = 1 - (d_b/d_0)^2. \quad (6.15)$$

从这样关系可以看出 ψ, d_0, d_b 只有2个参数是独立的，所以在考虑 d_0, d_b 时候，断面收缩率 ψ 就不是独立的参量，所以表达式(6.1)需要修改。

由于在有 d_0, d_b 的情况下，断面收缩率 ψ 不是独立的参量，这样断裂时射流直径 d_b 表达式可以表示成

$$d_b = f_1(\Omega, \rho, Y). \quad (6.16)$$

断裂时间 t_b 的表达式可以表示成

$$t_b = f_2(\Omega, \rho, Y). \quad (6.17)$$

这两个表达式分别只有4个参量, 有3个基本量, 所以只能分别组合成一个 Π , 从 Π 定理知道, 这个 Π 只能是一个常数。所以, 得到修改后的断裂时射流直径 d_b 表达式

$$d_b = c_1 \left(\Omega \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \right)^{1/3}, \quad (6.18)$$

和断裂时间 t_b 的表达式

$$t_b = c_2 \left(\frac{\rho}{Y} \right)^{1/3}, \quad (6.19)$$

其中 c_1, c_2 为常数, 它们不再是断面收缩率 ψ 的函数。从Crady的研究, 可以确定 $c_2 = \frac{1}{2}$ 。这里给出的 t_b 与Crady的完全相同。不同的是Crady的公式没有使用面积冲量 Ω 。

把表达式(6.18)代入倒(6.15), 得到断面收缩率

$$\psi = 1 - \left(\frac{c_1}{d_0} \right)^2 \left(\Omega \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \right)^{2/3}. \quad (6.20)$$

改进后的表达式(6.18),(6.19)和(6.20)由孙博华导出[57]。

这里的工作小结如下: 第一、澄清了断面收缩率 ψ 不是独立变量, 它与射流的拉伸应变率有关系 $\psi = 1 - \left(\frac{c_1}{d_0} \right)^2 \left(\Omega \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \right)^{2/3}$; 第二、获得了考虑面积冲量 Ω 的断裂直径 $d_b = c_1 \left(\Omega \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \right)^{1/3}$; 第三、断裂时间 $t_b = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{Y} \right)^{1/3}$ 。

6.2 薄板在高速射流冲击下的撕裂问题

假设薄板抵抗变形的参数是屈服极限 Y , 假设在初始时刻, 有一直径为 d_0 的细长金属射流, 射流密度是 ρ , 以非常高的速度 v_0 冲击与其运动方向垂直的薄板, 显然薄板将被撕裂甚至击穿, 求撕裂厚度 d_b 和发生断裂的时间 t_b 。

破甲弹的聚能射流从端部到尾部速度不等而逐步递减, 这个速度梯度使射流逐渐拉长变细, 最终导致断裂。金属薄板受到弹丸超高速冲击后形成鼓包, 鼓包在速度梯度作用下不断变薄撑大, 最终导致断裂和破碎, 变成碎片云。

Crady[55]对这个问题进行了量纲分析, 谈庆明[56]采用郑哲敏[54]对射流低速段的稳定问题进行了量纲分析的思想, 也对薄板撕裂问题进行了量纲分析, 得到了相关的撕裂厚度 d_b 和发生断裂的时间 t_b 。但他们的结果稍微有些差别, 这里分别介绍。

先介绍Crady的量纲分析结果。对于撕裂厚度问题有5个参量 Y, d_0, ρ, v_0, d_b , 分别列出它们的量纲(表6.2)。

Table 6.2 薄板撕裂长度问题参量的量纲

Y	d_0	ρ	v_0	d_b
$L^{-1}mt^{-2}$	L	mL^{-3}	Lt^{-1}	L

Table 6.3 薄板发生断裂的时间问题参量的量纲

Y	d_0	ρ	v_0	t_b
$L^{-1}mt^{-2}$	L	mL^{-3}	Lt^{-1}	t

对于发生断裂的时间问题也有5个参量 Y, d_0, ρ, v_0, t_b ，列出它们的量纲(表6.2).

这两个问题都有 $n = 5$ 个参量，3个基本量纲 m, t, L ，取 d_0, ρ, Y 为基本量，可知这两个问题都有两个独立的无量纲 Π 。

对于撕裂厚度问题，有2个 Π

$$\Pi_1 = d_b d_0^a \rho^b Y^c = d_b d_0^{-1}, \quad \Pi_2 = v_0 d_0^a \rho^b Y^c = v_0 \sqrt{\frac{\rho}{Y}}, \quad (6.21)$$

利用量纲分析 Π 定理，它们有关系 $\Pi_1 = f_1(\Pi_2)$ ，即可得到断裂时厚度

$$d_b = d_0 f_1(J), \quad (6.22)$$

其中 $J = v_0^2 \rho / Y$ 为(动态)破坏数，郑哲敏在1965年研究流体弹塑性体模型时就曾使用这个数。它表征动压与强度之比，或惯性与强度之比。

对于发生断裂的时间问题，用同样方法可以得到 t_b

$$t_b = d_0 \sqrt{\frac{\rho}{Y}} f_2(J). \quad (6.23)$$

谈庆明[56][59][60]采用郑哲敏[54]在处理射流稳定性的思想，对这个问题进行了量纲分析，所不同的是在几何方面不再是一维的单向拉伸，而是二维薄板的双向拉伸。谈庆明采用郑哲敏提出的断口截面收缩率 ψ ，并重新定义了二维的 Ω ，即

$$\frac{dm}{du_j du_j} = \rho d_0 \left(\frac{dl}{du_j} \right)^2 = \rho \frac{d_0}{\varepsilon_0^2} = \rho \frac{d_0}{\varepsilon_0^2} = \rho \frac{d_0}{\varepsilon_0^2} = \text{constant}, \quad (6.24)$$

其中薄板的厚度是 d_0 ，两个方向的长度是 dl ，微质量是 dm 。

引入新的参数 Ω_p ，即

$$\Omega_p = \frac{d_0}{\varepsilon_0^2}. \quad (6.25)$$

这样引入的 Ω_p 与郑哲敏的“面积冲量” Ω 的量纲是不同的，这里的 Ω_p 其量纲是 Lt^2 ，不是“面积冲量”。这样谈庆明就得到问题的一组参量(表6.4)。

Table 6.4 薄板撕裂问题参量的量纲

Y	Ω_p	ρ	ψ_p	d_b	t_b
$L^{-1}mt^{-2}$	Lt^2	mL^{-3}	1	L	t

这样，撕裂厚度 d_b 可以表达成

$$d_b = f(\Omega_p, \rho, Y, \psi_p). \quad (6.26)$$

发生断裂的时间 t_b 可以表达成

$$t_b = f(\Omega_p, \rho, Y, \psi_p). \quad (6.27)$$

利用量纲分析可以得到断裂时厚度 d_b 表达式

$$d_b = f(\psi_p) \left(\Omega_p \frac{Y}{\rho} \right)^{1/3}, \quad (6.28)$$

和发生断裂时间 t_b 的表达式

$$t_b = g(\psi_p) \left(\Omega_T \sqrt{\frac{\rho}{Y}} \right)^{1/3}, \quad (6.29)$$

其中 $f(\psi), g(\psi)$ 为断面收缩率 ψ_p 的函数。

显然, 谈庆明(6.28-6.29)与Crady(6.22-6.23)的结果不同, 究竟那个正确, 需要实验验证。

类似上一节我们对断面收缩率 ψ_p 的讨论, 可以看出对于薄板来讲, 初始厚度是 d_0 , 断裂时的厚度是 d_b , 所以这里的断面收缩率 ψ_p 的定义应该是

$$\psi_p = 1 - \frac{d_b}{d_0}. \quad (6.30)$$

显然, d_0, d_b, ψ_p 不是完全独立的, 由于 Ω_p 中已经包含了 d_0 , 所以完全可以把 ψ_p 从表达式中去掉, 从而得到薄板发生断裂的厚度 d_b 表达式

$$d_b = c_1 \left(\Omega_p \frac{Y}{\rho} \right)^{1/3}, \quad (6.31)$$

和发生断裂时间 t_b 的表达式

$$t_b = c_2 \left(\Omega_p \sqrt{\frac{\rho}{Y}} \right)^{1/3}, \quad (6.32)$$

其中 c_1, c_2 为常数。

这样也可以得到断面收缩率 ψ_p

$$\psi_p = 1 - \frac{d_b}{d_0} = 1 - \frac{c_1}{d_0} \left(\Omega_p \frac{Y}{\rho} \right)^{1/3}. \quad (6.33)$$

从量纲分析的角度, 在谈庆明[56]基础改进的表达式(6.31-6.32), 比Crady的表达式(6.22-6.23)要简单, 因为其中没有任何待定函数, 只有一个常数。

同时, 这里的公式比Crady的公式优越, 因为是显式表达, 没有待定函数。另外, Crady的公式不能确定断面收缩率 ψ , 而我们可以确定。

改进后的表达式(6.31), (6.32)和(6.33)由孙博华导出[58]。

这里的工作小结如下: 第一、澄清了断面收缩率 ψ 不是独立变量, 它与薄板的拉伸应变率有关系 $\psi_p = 1 - \frac{d_b}{d_0} = 1 - \frac{c_1}{d_0} \left(\Omega_p \frac{Y}{\rho} \right)^{1/3}$; 第二、获得了考虑参量 Ω 的断裂直径 $d_b = c_1 \left(\Omega_p \frac{Y}{\rho} \right)^{1/3}$; 第三、和断裂时间 $t_b = c_2 \left(\Omega_p \sqrt{\frac{\rho}{Y}} \right)^{1/3}$ 。

6.3 固体的断裂问题

作为一门学科, 断裂力学在第一次世界大战期间为英国航空工程师A. A. Griffith所创立, 用于解释脆性材料的断裂。他面临的问题是, 从理论上说, 小裂纹尖部的应

力接近无穷大。也就是说，无论裂纹有多小，负载有多轻，材料都会失效。为了逃出困境，他发展出一套热力学方法。他假定裂纹的延展需要创造表面能量，这一能量是形变能提供的。如果形变能的损失足以提供新的表面能，裂纹就开始沿展。决定材料是否发生断裂不能只看拉应力或剪应力是否超过材料的强度，实验证实，表征材料断裂的是另一个指标，被称为断裂韧性 K_c ，其量纲是 $L^{-1/2}mt^{-2}$ 。

郑哲敏曾对工程科学问题系统使用量纲分析方法并取得非常重要的成果，这里介绍郑哲敏[61]对经典弹塑性力学进行的量纲分析结果。他指出断裂韧性 K_c 不能从经典弹塑性力学的弹性常数 E, ν 和屈服极限 σ_s 导出，而 E 和 σ_s 的量纲与断裂韧性 K_c 的量纲差别一个比例 $L^{1/2}$ 。这是一个非常精彩的量纲分析实例，下面我们来简单介绍。

问题：设有一个裂纹长度是 l ，受到拉应力 σ_0 的作用，材料的弹性模量为 E ，泊松比为 ν 。我们要问，拉应力 σ_0 逐渐增加到什么值的时候，裂纹开始扩展？

根据问题的表述，拉应力 σ_0 必须是其他参数的函数，即

$$\sigma_0 = f(E, \nu, l). \quad (6.34)$$

为了利用量纲分析，列出这4个参量的量纲(表6.5)。

Table 6.5 固体的断裂问题参量的量纲

σ_0	E	ν	l
$L^{-1}mt^{-2}$	$L^{-1}mt^{-2}$	1	L

由于 ν 是无量纲， σ_0, E, l 之间只能组成一个 Π ，即

$$\Pi = \sigma_0 E^a l^b. \quad (6.35)$$

从量纲分析的齐次定理，可得 $a = -1, b = 0$ ，所以有

$$\frac{\sigma_0}{E} = f(\nu). \quad (6.36)$$

这个结果没有包括裂纹的初始长度，就是说使裂纹扩展的拉应力与原始裂纹长度无关，这显然与实际不符，必须修改，但如何修正？

郑哲敏([61])认为，既然长度尺度不能在经典理论中考虑进来，修改经典理论的方向就一定是考虑某种包含长度量纲的新物理量，从断裂的物理现象看，随着拉伸应力的逐渐提高，弹塑性变形能伴随着也逐渐提高，弹塑性变形能并逐渐转换成表面能 γ 。表面能 γ 的提高开动裂纹扩展，所以，断裂问题必须考虑表面能 γ ，其量纲是 mt^{-2} 。

这样，问题的表达就改成

$$\sigma_0 = f(E, \nu, l, \gamma). \quad (6.37)$$

这个表达式也可以改写成有关弹性能的形式

$$\frac{\sigma_0^2}{E} = f(\nu, l, \gamma). \quad (6.38)$$

可以取 $l, \gamma w$ 为基本量，得到无量纲关系

$$\frac{\sigma_0^2 l}{E \gamma} = f(\nu), \quad \text{或} \quad \sigma_0^2 l = E \gamma f(\nu) \equiv C_G, \quad (6.39)$$

其中, C_G 是由材料的 E, ν, γ 决定的常数。从表达式(6.39)可得

$$\sigma_0 = l^{-1/2} \sqrt{C_G}. \quad (6.40)$$

表明裂纹扩展的应力 σ_0 与裂纹的长度的 \sqrt{l} 成反比, 这是与实验相符合的。

从经典弹性力学可以得到这个问题的应力强度因子 $K_I = (\pi l)^{1/2} \sigma_0$, 这样就有裂纹扩展条件的表述: 应力强度因子达到临界值 K_{Ic} 。这里的 K_{Ic} 称为断裂韧性。显然有关系

$$K_{Ic} = (\pi C_G)^{1/2}. \quad (6.41)$$

从经典弹性力学, 可得裂纹扩展 dl 所释放的弹性能为 $K_{Ic}^2(1-\nu^2)dl/E$, 这一弹性能将转化表面能 $2\gamma dl$, 即有关系

$$K_{Ic}^2(1-\nu^2)dl/E = 2\gamma dl, \quad \text{或}, \quad \pi C_G(1-\nu^2) = 2E\gamma. \quad (6.42)$$

这样就得到

$$C_G = \frac{2E\gamma}{\pi(1-\nu^2)}, \quad \text{和} \quad f(\nu) = \frac{2}{\pi(1-\nu^2)}. \quad (6.43)$$

从而, 可以得到裂纹开始扩展时的应力值为

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi(1-\nu^2)l}}. \quad (6.44)$$

有关断裂力学的标度律可参考赵亚溥的综述性文章[62]。

6.4 航天器液体推进剂的晃动问题

自从1957年10月4日前苏联发射世界上第一个航天器—“人造地球卫星一号”以来, 航天器经历了由简单到复杂的发展过程, 航天器动力学也经历了由低级到高级的发展过程。由于有效载荷的增加和任务寿命的提高, 现代航天器通常携带着大量的液体推进剂, 液体推进剂质量可达到运载火箭总质量的90%以上、卫星或探测器总质量的50%以上。因此液体对航天器的动力学特性有着十分重要的影响。一方面, 大量液体推进剂的晃动会对航天器产生较大的干扰力和力矩, 一旦超过控制系统可调节或结构所能承受的上限, 将造成控制系统不稳定或结构破坏。1998年美国NASA发射的Near Earth Asteroid Rendezvous (NEAR) (近地小行星会合)航天器在执行近地小行星探测任务时, 由于卫星姿态与液体晃动之间的耦合导致一个推进系统失效, 使任务延迟了13个月。

另一方面, 液体推进剂与贮箱壳体的液固耦合作用会大大降低航天器结构的振动频率。当火箭纵向振动频率与推进反馈系统频率发生耦合时, 将产生纵向耦合振动, 对运载火箭中的人员和仪器产生不利影响; 当火箭横向振动频率与推进剂贮箱内液体晃动频率相接近时, 二者有可能发生耦合作用而对火箭飞行稳定性产生影响[63]。

航天器液体推进剂的晃动问题, 类似一个封闭桶中有未充满的液体, 即有自由表面。这样航天器的结构整体运动就会对其中的液体产生相互作用, 使液体产生晃动, 我们的问题是求晃动力 F 。

显然这个问题包含以下参量: 推进剂燃料桶的几何尺寸(直径 R , 全或半高 H), 液体的高度 h , 液体密度 ρ , 液体粘性 μ , 表面张力 γ , 有效加速度 g_e , 燃料桶运动的振幅 A , 燃料桶结构振动频率 ω 和晃动力 F 。

显然，问题有10个参量，3个基本量纲是 L, m, t ，所以可以产生7个 Π 。物理上，这个问题包括5个方面的力，它们是：粘性力，重力，惯性力，表面张力和晃动力。问题的本质就是这些力之间的动态平衡问题。

晃动力 F 应当可以表示成其他参量的函数，即

$$F = f(R, H, h, A, \rho, \mu, \gamma, g_e, \omega). \quad (6.45)$$

为了使用量纲分析，把这10个参量的量纲列表成(表6.6)。

Table 6.6 液体推进剂的晃动问题参量的量纲

R	H	h	ρ	μ	γ	g_e	A	ω	F
L	L	L	mL^{-3}	$mL^{-1}t^{-1}$	mt^{-2}	Lt^{-2}	L	t^{-1}	mLt^{-2}

为简化，先在几何方面对表达式(6.45)进行无量纲简化，得到

$$F = f\left(\frac{H}{R}, \frac{h}{R}, \frac{A}{R}, \rho, \mu, \gamma, g_e, \omega\right). \quad (6.46)$$

这5个方面的力（粘性力，重力，惯性力，表面张力和晃动力）产生4个 Π ，即

$$\frac{F}{\rho g_e R^2 A} = f\left(\frac{H}{R}, \frac{h}{R}, \frac{A}{R}, \sqrt{\frac{g_e R^3}{\mu}}, \frac{g_e R^2}{\gamma}, \omega \sqrt{\frac{R}{g_e}}\right). \quad (6.47)$$

这里的组合参量可以与已知的无量纲数联系起来。伽利略数 $Ga = \sqrt{\frac{g_e R^3}{\mu}}$ 代表重力与粘性力的比，邦德(Bond)数 $Bo = \frac{g_e R^2}{\gamma}$ 代表重力与表面张力的比，和Froude数 $Fr = \omega \sqrt{\frac{R}{g_e}}$ 代表惯性力与重力的比。

所以，表达式也可以写成

$$\frac{F}{\rho g_e R^2 A} = f\left(\frac{H}{R}, \frac{h}{R}, \frac{A}{R}, Bo, Fr, Ga\right). \quad (6.48)$$

这个关系是有Abramson和Ransleben于1960得到的[64]。

在航天器的不同飞行阶段， Bo 、 Fr 和 Ga 这三个 Π 会起到不同的作用，应该可以分成3个阶段，每一个阶段由其中的一个 Π 控制。

在发射阶段由于由火箭发动机的巨大推力，有效加速度比较大，这一阶段Froude数其主要作用，所以表达式可以简化成

$$\frac{F}{\rho g_e R^2 A} \propto Fr^\alpha = \left(\omega \sqrt{\frac{R}{g_e}}\right)^\alpha, \quad (6.49)$$

所以，晃动力是

$$F \propto \rho g_e R^2 A Fr^\alpha = \rho g_e R^2 A \left(\omega \sqrt{\frac{R}{g_e}}\right)^\alpha, \quad (6.50)$$

入轨前的有效加速度较小，这一阶段 Ga 数起主要作用，有晃动力

$$F \propto \rho g_e R^2 A Ga^\beta = \rho g_e R^2 A \left(\sqrt{\frac{g_e R^3}{\mu}}\right)^\beta, \quad (6.51)$$

当航天器在轨时，有效加速度 g_e 非常小，Bond数就比较主要，这时有晃动力

$$F \propto \rho g_e R^2 A B o^\lambda = \rho g_e R^2 A \left(\frac{g_e R^2}{\gamma} \right)^\lambda, \quad (6.52)$$

其中幂指数 α, β, λ 需要实验确定。

不管这些幂指数是多少，从以上的晃动力的简化结果看，航天器的燃料桶的直径 R 是一个核心参数。如果需要减低晃动力 F ，一个较优化的方案是减少航天器燃料桶的直径。就是说航天器的燃料桶最好设计成“细长型”，或者把燃料桶内部设计成许多的细长型的小桶，并排在一起形成燃料桶系统，这样既可以保证航天器有足够大的燃料桶同时还可以降低晃动力，提高航天器的运动稳定性[65]。

6.5 海面原油泄漏的扩展问题

海面原油泄漏后，由于重力的原因，油面会逐渐扩散面积变大，油层变薄；同时，表明张力会试图阻止继续扩散；一旦油面开始扩散，还会带动其下密度较大的海水运动，惯性与海水粘性也起作用。我们的问题是：假设海面平静，求油面直径扩展的时间规律。

设原油泄漏体积为 V ，油面直径 D ，油面厚度 h ，海水密度 ρ ，海水静粘性 $\nu = \mu/\rho$ ，油与海水间的表面张力 σ ，油与海水密度差 $\Delta\rho = \rho - \rho_0$ ，重力加速度 g ，扩散开始后的时间 t ，其中 ρ_0 是油的密度。该问题参量的量纲列表成(表6.7)。

Table 6.7 海面原油泄漏的扩展问题参量的量纲

D	V	h	ρ	ν	σ	$\Delta\rho$	g	t
L	L^3	L	mL^{-3}	L^2t^{-1}	mt^{-2}	mL^{-3}	Lt^{-2}	t

由于假设海面平静，所以油面扩散不间断，油面扩散直径 D 不是时间 t 的间断函数，而是连续函数。显然，油面扩散直径 D 可以表示成其他参数的函数关系

$$D = f(V, h, \rho, \nu, \sigma, \Delta\rho, g, t). \quad (6.53)$$

这个问题有9个参量，但是，因为一般知道原油泄漏的体积 V ，所以相应的特制长度尺度可取成 $L = V^{1/3}$ 。所以，表达式(6.53)可以改写成

$$D = f(V, V^{1/3}, \rho, \nu, \sigma, \Delta\rho, g, t) = f(V, \rho, \nu, \sigma, \Delta\rho, g, t). \quad (6.54)$$

这样就减少一个参数，变成8个参数。由于基本量纲为3个，所以可以产生5个 Π ，它们是

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{D}{V^{1/3}}, & \Pi_2 &= \frac{\rho V^{1/3}}{\Delta\rho g t^2}, \\ \Pi_3 &= \frac{g \Delta\rho}{\rho} \sqrt{\frac{t^3}{\nu}}, & \Pi_4 &= \frac{\rho V^{2/3}}{\sigma} \sqrt{\frac{\nu}{t^3}}, & \Pi_5 &= \frac{\Delta\rho}{\rho}. \end{aligned} \quad (6.55)$$

由量纲分析的 Π 定理，可得问题的无量纲关系式 $\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5)$ ，即

$$\frac{D}{V^{1/3}} = f\left(\frac{\rho V^{1/3}}{\Delta\rho g t^2}, \frac{g \Delta\rho}{\rho} \sqrt{\frac{t^3}{\nu}}, \frac{\rho V^{2/3}}{\sigma} \sqrt{\frac{\nu}{t^3}}, \frac{\Delta\rho}{\rho}\right). \quad (6.56)$$

这个关系由Fay于1969导出[66]。

表达式(6.56)中 Π 可以与一些有名的无量纲数联系起来。 Π_1 就是Froude数 Fr ，表示惯性与重力的比； Π_2 就是伽利略数 Ga ，表示重力与粘性力的比； Π_3 就是奥内佐格数(Ohnesorge)数 Oh ，表示粘性力与表面张力的比。所以，表达式(6.56)可以改写成

$$D = V^{1/3} f(Fr, Ga, Oh, \frac{\Delta\rho}{\rho}). \quad (6.57)$$

Fay(1969)[66]的一个重要贡献是他认识到海面原油泄漏的扩散过程分成三个阶段，每一个阶段由其中的一个 Π 控制，有不同的时间尺度律。

扩散开始阶段，油面厚度较大，重力比表面张力强，重力是主导因素，与之抗衡的粘性力还没有来得及发展，最主要的扩散驱动因素是由重力引起的油面加速扩展，所以，这一阶段，Froude数 Fr 起主导作用，其它 Π 影响可以忽略，有油面直径 D

$$D \propto V^{1/3} f(Fr, \frac{\Delta\rho}{\rho}) \propto (Fr)^\alpha = \left[\frac{\rho V^{1/3}}{\Delta\rho g t^2} \right]^\alpha. \quad (6.58)$$

这里的幂指数 α 仅与 $\Delta\rho/\rho$ 有关。Fay通过模型实验得到 $\alpha = -1/4$ ，这样就得到开始扩散阶段的时间尺度律是

$$D \propto \left[g V \frac{\Delta\rho}{\rho} \right]^{1/4} t^{1/2}. \quad (6.59)$$

这个阶段之后的第二阶段，重力仍然是主导因素，但第二阶段油面扩展加速度 $\ddot{D} \propto -t^{-3/2}$ 逐渐减小并趋于0，此时粘性力起主导作用，所以伽利略数 Ga 起主要作用，其他 Π 影响可以忽略，有第二阶段油面直径 D

$$D \propto V^{1/3} f(Ga, \frac{\Delta\rho}{\rho}) \propto (Ga)^\beta = \left[\frac{\rho V^{1/3}}{\Delta\rho g t^2} \right]^\beta. \quad (6.60)$$

Fay通过模型实验得到 $\beta = 1/6$ ，这样就得到扩散第二阶段的直径 D 的时间尺度律是

$$D \propto \left[\frac{g}{\sqrt{\nu}} \frac{\Delta\rho}{\rho} V^2 \right]^{1/6} t^{1/4}. \quad (6.61)$$

最后阶段，油面厚度非常薄，重力已经不重要，表面张力是扩散的主因，它与粘性力平衡，这个阶段 Oh 数起主要作用。Fay得到阶段的直径 D 的时间尺度律是

$$D \propto V^{1/3} f(Oh, \frac{\Delta\rho}{\rho}) \propto \left[\frac{\sigma}{\rho\sqrt{\nu}} \right]^{1/2} t^{3/4}. \quad (6.62)$$

从以上表达式可以看出，第一和第二阶段，泄漏的原油体积 V 起作用，但到最后阶段，因为油层非常薄，扩散律与 V 无关。

6.6 风吹声问题

气流中有小尺度物体(尺度与相关的波长比很小)就会发出风吹声。这种现象的本质是因为Kármán涡街。

在流体中安置阻流体，在特定条件下会出现不稳定的边界层分离，阻流体下游的两侧，会产生两道非对称地排列的旋涡，其中一侧的旋涡顺时针方向转动，另一旋涡则反方向旋转，这两排旋涡相互交错排列，各个旋涡和对面两个旋涡的中

间点对齐，如街道两边的街灯般，这种现象，因von Kármán最先从理论上阐明而得名Kármán涡街。

这里的问题是：设小物体的特征长度如圆柱的直径是 D ，气体密度 ρ ，气体动粘性 μ ，来流速度 U ，求小物体振动频率 f 。

这个问题有5个参量，它们的量纲见(表6.7)。

Table 6.8 卡门涡街问题参量的量纲

f	D	μ	ρ	U
t^{-1}	L	$L^{-1}mt^{-1}$	mL^{-3}	Lt^{-1}

频率 f 可以写成其他参量的函数

$$f = \varphi(U, D, \mu, \rho). \quad (6.63)$$

为与频率 f 区别，这里把量纲函数写成 φ 。

这个问题一共有5个参量，3个基本量纲，可以产生2个 Π 。取 U, D, ρ 为基本变量，利用量纲分析，可以得到2个 Π ，即

$$\Pi_1 = \frac{fD}{U}, \quad \Pi_2 = \frac{\mu}{\rho UD}. \quad (6.64)$$

Π_1 是Strouhal数 St ， Π_2 是雷诺(Reynolds)数 Re 的倒数。所以，物体的风吹声频率可以表达成 $\Pi_1 = \varphi(\Pi_2)$ ，即

$$St = \varphi\left(\frac{1}{Re}\right), \quad \text{即} \quad f = \frac{U}{D} \varphi\left(\frac{1}{Re}\right). \quad (6.65)$$

从流体力学可以确定待定函数 $\varphi\left(\frac{1}{Re}\right) = 0.1951\left(1 - \frac{1}{5Re}\right)$ ，所以有小物体的风吹声频率为

$$f = 0.1951\left(1 - \frac{1}{5Re}\right) \frac{U}{D}. \quad (6.66)$$

从频率表达式可以看到，频率 f 与风速 U 成正比，与特征尺度 D 成反比，即风大频率高，或物体越小频率越高。

在风吹声中的气体流动速度一般不能太高，都是平稳层流与物体相互作用面发声的气流。速度高时就会有湍流，情况就不同了，这将在湍流噪声中介绍。

6.7 不可压各向同性湍流的标度律

物质一般有固态，(气)液态和等离子态，一般情况下流动的问题都相对复杂。我们的经验是流速比较快时流动就从稳定的层流开始有摆动，速度再快就进入完全紊乱的状态，这个状态就是我们这里说的湍流。湍流，也称为紊流(中国地区的旧称)，是流体的一种流动状态这时流体没有质变。

500多年前文艺复兴的大师L. da Vinci就已经注意到湍流现象并称为“turbolenze”，之后好长时间对湍流没有特别的研究成果，直到1830年Osborne Reynolds在做园管内流动试验时发现，当 $\rho LV/\mu$ 到一个值时，流动就紊乱称湍流，由于这个无量纲数非常重要后来由George Gabriel Stokes在1851命名为Reynolds数(雷诺数)记称 Re ，它是流体力学中第一有名的参数，所有的流动现象几乎都与它有关。

雷诺数较小时，黏滞力对流场的影响大于惯性力，流场中流速的扰动会因黏滞力而衰减，流体流动稳定，为层流；反之，若雷诺数较大时，惯性力对流场的影响大于黏滞力，流体流动较不稳定，流速的微小变化容易发展、增强，形成紊乱、不规则的湍流流场。



Figure 6.1 湍流.

有效地描述湍流的性质，至今仍然是物理学中的一个重大难题¹，所以被认为是经典物理学最难的一个问题之一。

由于湍流无时无地不在，不得不时刻面对，没有办法，虽然人类对湍流还没有完全把握，但经过百年来的努力，对湍流有了一定的了解。1904年德国Prandtl²在其著名论文Fluid Flow in Very Little Friction³首次注意到大雷诺数时粘性的重要性，并提出了边界层概念。1922年L.F. Richardson⁴发现湍流有各种尺度的涡(eddy),能量从大涡向较小尺度的涡传递，最后被耗散成热⁵。1930年左右英国G.I.Taylor 提出

¹According to an apocryphal story, Werner Heisenberg was asked what he would ask God, given the opportunity. His reply was: "When I meet God, I am going to ask him two questions: Why relativity? And why turbulence? I really believe he will have an answer for the first." A similar witticism has been attributed to Horace Lamb (who had published a noted text book on Hydrodynamics)—his choice being quantum electrodynamics (instead of relativity) and turbulence. Lamb was quoted as saying in a speech to the British Association for the Advancement of Science, "I am an old man now, and when I die and go to heaven there are two matters on which I hope for enlightenment. One is quantum electrodynamics, and the other is the turbulent motion of fluids. And about the former I am rather optimistic."

²现代力学之父，学生有冯·卡门。

³Prandtl, L., Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandlungen d. III. Internat. Math. Kongr. Heidelberg, 8.-13. Aug. 1904, B. G. Teubner, Leipzig 1905, pp. 485-491 (In [50]: p. 575)

⁴L.F. Richardson, "Weather Prediction by Numerical Process." Cambridge University Press, 1922.

⁵L.F. Richardson:

*Big whirls have little whirls
Which feed on their velocity;
And little whirls have lesser whirls,
And so on to viscosity
in the molecular sense.*

各向同性湍流的统计理论。1941年苏联A.N.Kolmogorov发表了3篇简短论文，提

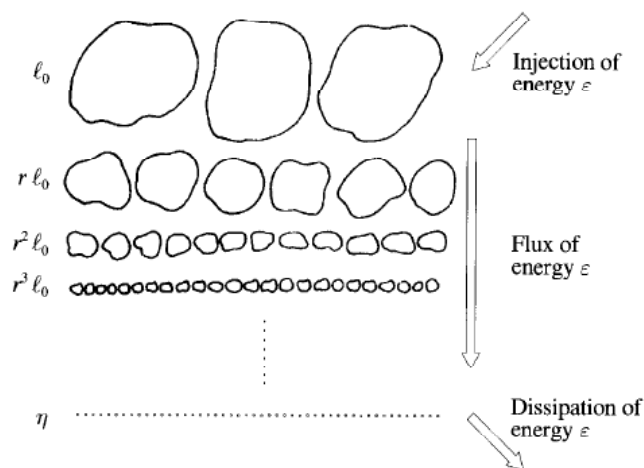


Figure 6.2 湍流的串级.

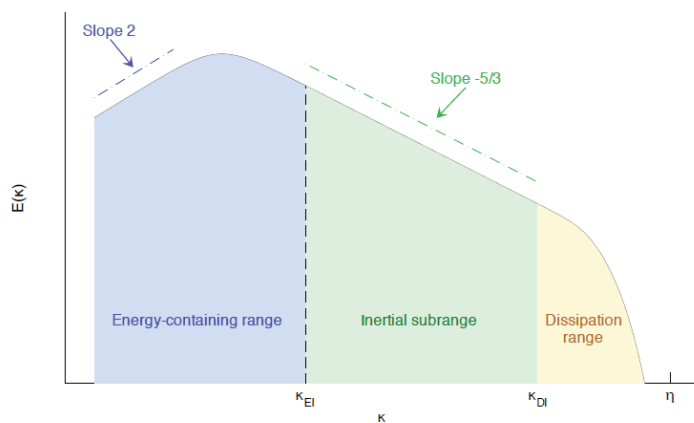


Figure 6.3 湍流的Kolmogorov 5/3 标度率.

出了能量谱的标度律，这个理论可以描述湍流能量如何从大涡向小涡的传递，具体尺度的涡含有多少能量，以及每一尺度的涡耗散的能量大小。Kolmogorov理论可以说是Richardson猜想的量化。Kolmogorov假设在惯性子区(inertial subrange)，能

谱 $E(k)$ 只与波数 k 和耗散律 ϵ 有关,即

$$E(k) = f(k, \epsilon). \quad (6.67)$$

说到这里如果不继续就没有惊喜了。这个惊喜是由量纲分析实现的。这个问题

Table 6.9 参量的基本量纲

$E(k)$	k	ϵ
$L^3 t^{-2}$	L^{-1}	$L^2 t^{-3}$

的参量个数 $n=3$,基本单位有长度 L 和时间 t ,就是说 $j=2$,根据 Π 定律,可以构造一个 Π 。由于能谱 $E(k)$ 是因变量,就区 k, ϵ 为重复参量,从而有

$$\Pi = E(k)\epsilon^\alpha k^\beta, \quad (6.68)$$

量纲关系是

$$\Pi = [L^3 t^{-2}][L^2 t^{-3}]^\alpha [L^{-1}]^\beta, \quad (6.69)$$

得幂次关系等式

$$-2 - 3\alpha = 0, \text{ 得到 } \alpha = -2/3$$

$$3 + 2\alpha - \beta = 0, \text{ 得到 } \beta = 5/3$$

$$\text{这样就有 } \Pi = E(k)\epsilon^{-2/3}k^{5/3},$$

由于这里只有一个 Π ,它就不可能是任何东西的函数,所以这个 Π 必须是一个普适常数,记成 C_K 。这样能谱就可以表达成

$$\Pi = E(k)\epsilon^{-2/3}k^{5/3} = \text{constant} = C_K, \quad (6.70)$$

或者

$$E(k) = C_K \epsilon^{2/3} k^{-5/3}. \quad (6.71)$$

这个看似简单的公式非常重要,可能是人们对湍流研究的一个最高成果之一,被称为Kolmogorov -5/3 标度律,普适常数 $C_K = 1.5$ 。Kolmogorov -5/3标度律常用来验证一个模型和计算方法的准确性。

6.8 沙漠治理中草方格的障沙问题

草方格(Fig.6.4)是由苏联专家Petrov引进到中国的。草方格沙障是一种防风固沙,涵养水分的治沙方法,用麦草,稻草,芦苇等材料在沙漠中扎成方格形状。在中国的典型应用是宁夏的沙坡头的治理,其治理的起因是为了保护此地铁路线(如附近的包兰线)免受沙漠淹埋。草方格沙障固沙成本高,费工大,但对于保护交通干线非常有效。沙坡头因治沙成就卓越经验丰富被世界治沙同行评为“全球环境保护500佳”。

草方格沙障一是能使地面粗糙,减小风力,再一个可以截留水分,如雨水,提高沙层含水量,有利于固沙植物的存活。沙区群众把沙障统称为“风墙”,草方格

沙障是用麦草、稻草、芦苇等材料，在流动沙丘上扎设成方格状的挡风墙，以削弱风力的侵蚀。施工时，先在沙丘上划好施工方格网线，要使沙障与当地的主风向垂直。再将修剪均匀整齐的麦草或稻草等材料横放在方格线上，用板锹之类的工具置于铺草料中间，用力插下去，插入沙层内约15厘米，使草的两端翘起，直立在沙面上，露出地面的高度约20厘米~25厘米。再用工具拥沙埋掩草方格沙障的根基部，使之牢固。根据试验，草方格沙障的规模以1米X1米的正方形效果最好。



Figure 6.4 草方格沙障.

这个问题曾由郑晓静等研究过，他们提出一种模型利用没有粘性的无旋有势流，针对草方格沙障防护区域内流场的特点，提出一个单排理想涡列模型，用以模拟实际风沙流场，利用流体力学的分析方法，给出了与目前工程实际所建议的尺寸比较吻合的草方格沙障间距(或草方格边长)与出露草头高度的对应关系。⁶

从这篇文章中知道，野外观测表明：当风沙流经过新设置的草方格沙障时，在其内部产生旋涡(Fig.6.5)，经过足够长的时间后，障内沙面形成光滑稳定的凹曲面(Fig.6.6)。这样，即使当强气流经过时，沙面自身并不起沙，从而达到固沙的目的。从(Fig.6.5)还可以看出，随着草头高度提高，其中的旋涡被完全包在草方格内且比较稳定。风洞实验也显示，草方格内部的确存在旋涡运动。实际上，如果地面水平，层流通常将很快转捩为湍流，但由于稳定时刻地表凹槽与涡的存在，他们把流动近似当作层流处理。稳定后的沙面可以看成是上面风流动的边界表面，所以风的作用实际就是试图改变其边界形状，这样从风流动的角度也可以把草方格的草头高度看作成一种几何粗糙(度)，草方格的高宽比是什么关系才能有效的障沙就是这个研究需要回答的问题⁷。

我们不做具体的计算，希望从量纲分析的角度，考察一下这个问题。显然，这个问题除了可以把空气看成是无粘的情况，我们这里认为需要把空气考虑成有粘性，因为如果没有粘性就没有了剪切，空气就没有涡旋，也不能使沙子产生漩涡，

⁶王振亭, 郑晓静, 草方格沙障尺寸分析的简单模型, 中国沙漠第22卷, 第3期, 229-232.

⁷请注意草方格问题与管流摩擦阻力例子的相似性

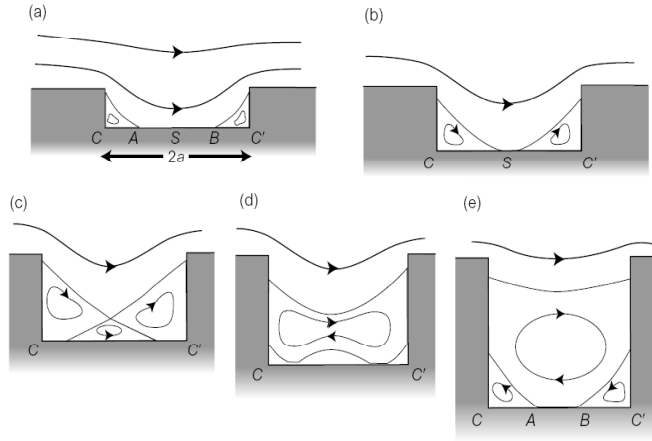


Figure 6.5 草方格内的空气漩涡示意图.

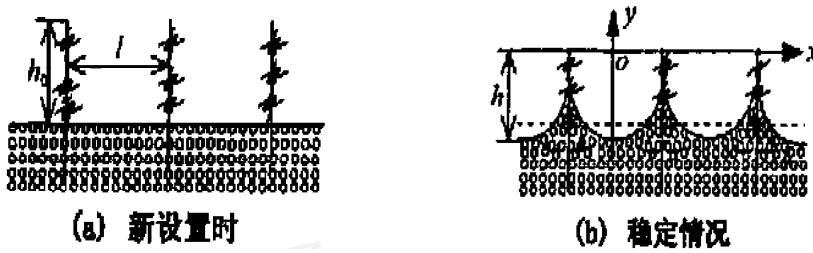


Figure 6.6 草方格沙面形成示意图.

就不可能起沙，那也就没有我们现在讨论的问题⁸。

这个问题有 $n=6$ 个参量，草方格的特征宽度 l ，草方格原来的草头高度 h_0 ，草方格稳定后草头高度 h ，风速 V ，空气比重 ρ ，和空气的粘性 μ 。问题是如何确定草头高与草方格长度等参量的关系，即

$$h_0 = f(h, l, V, \rho, \mu) \tag{6.72}$$

这个问题有 $j=3$ 个基本单位量纲(L,m,t)，所以无量纲 Π 的个数是 $k=n-j=6-3=3$ 。即有

Table 6.10 参量的基本量纲

h_0	h	l	V	ρ	μ
L^1	L^1	L^1	$L^1 t^{-1}$	$m L^{-3}$	$M^1 L^{-1} t^{-1}$

⁸孙博华，复杂力学问题的分析，北京科技大学学术报告，2014年9月北京

$$\Pi_1 = h_0/l \quad (6.73)$$

$$\Pi_2 = h/l \quad (6.74)$$

$$\Pi_3 = \rho VL/\mu, \quad (6.75)$$

其中 Π_1 , Π_2 就是草方格沙障的特征参数 $\lambda = h/l$, $\lambda_0 = h_0/l$, Π_3 就是雷诺数 $Re = \rho VL/\mu$, 从而有问题的关系式

$$\lambda_0 = f(\lambda, Re) \quad (6.76)$$

如果我们假设最极端的情况, 就是风沙稳定后的草头刚好被覆盖, 即草头高度完全被使用, 即稳定后的草头高度为零, $h = 0$ 或 $\lambda = 0$, 这样原来草特征参数就与 λ 没有关系, 即可以改写成

$$\lambda_0 = f(Re) \quad (6.77)$$

以上2个方程对于层流和湍流都适用, 其具体形式需要通过实验确定。这个关系类似Karman涡街中的关系, 只能到这个程度了, 不能把雷诺数从函数中提取出来。

讨论: 以上关系(6.77)也可以改写成 $h_0 = lf(Re)$, 表明草头的高度与草方格特征宽度成正比, 越宽需要的草头越高才能挡住沙子。通常草方格的宽度是1米, 即 $l = 1m$, 经有关计算和测试, 得到草头高度一般 $h_0 = 15 - 20cm$, 这样可以简单确定 $f(Re) = (0.15 + 0.2)/2 = 0.175$, 沙漠治理中草方格问题公式

$$h_0 = 0.175l \quad (6.78)$$

$$l = 5.7129h_0 \quad (6.79)$$

比如你的稻草草头高度是 $h_0 = 13cm$, 这时需要调节草方格的宽度, 从(6.79)的第二式, 可以算出这时草方格的宽度就不能再是1米宽了, 应当在 $l = 74cm$ 左右才能达到防沙的效果。

对于草方格障沙问题, 可以定义一个无量纲参数, 草方格沙障的特征参数 $\lambda_0 = h_0/l$, 对于中国的大部分沙漠可以取 $\lambda_0 = 0.175$, 如果风速高可以适当提高些。

6.9 水力压裂

(油层)水力压裂(Hydraulic fracturing)又称为水力劈裂、水力裂解技术, 是开采页岩气时所用的方法, 用水压将岩石层压裂, 从而释放出其中的天然气或石油。第一个使用水力压裂是在1947年的现代水力压裂技术, 称为水平slickwater水力压裂技术。水力压裂是一项有广泛应用前景的油气井增产措施, 水力压裂法是目前开采天然气的主要形式, 使用掺入化学物质的水(压裂液)灌入页岩层进行液压碎裂以释放天然气。

水力压裂就是利用地面高压泵, 通过井筒向油层挤注具有较高粘度的压裂液。当注入压裂液的速度超过油层的吸收能力时, 则在井底油层上形成很高的压力, 当这种压力超过井底附近油层岩石的破裂压力时, 油层将被压开并产生裂缝。这时, 继续不停地向油层挤注压裂液, 裂缝就会继续向油层内部扩张。为了保持压开的裂缝处于张开状态, 接着向油层挤入带有支撑剂(通常石英砂)的携砂液, 携砂液进入裂缝之后, 一方面可以使裂缝继续向前延伸, 另一方面可以支撑已经压开的裂缝, 使其不致于闭合。再接着注入顶替液, 将井筒的携砂液全部顶替进入裂缝, 用石英砂将裂缝支撑起来。最后, 注入的高粘度压裂液会自动降解排出井筒之外, 在油层中留下一条或多条长、宽、高不等的裂缝, 使油层与井筒之间建立起一条新的流体通道。压裂之后, 油气井的产量一般会大幅度增长。

压裂液的主要成分是水，并混合三至十二种低浓度化学物质以达到比纯水更好的效果。一般压裂液含98%至99.5%水，而其他物质则占0.5%至2%。压裂液配方可根据钻井的地质特征及需求而调整。每次压裂都只会使用数种化学物质，如部分物质特性不符合要求，可从压裂液中完全剔除。

6.9.1 水力压裂的量纲分析

问题：给定压裂液的密度 ρ ，运动粘性系数 ν ，净压 p ，速度 U ；岩石的屈服强度 σ_Y ，岩石断裂初始裂纹直径或长度尺度 d ，岩石的断裂韧性 K_I （岩石压裂一般属于拉裂，所以可取 $K = K_I$ ）。确定裂纹张开的直径或长度 D ，代表压裂后裂纹的大小。

显然，裂纹扩张的长度 D 应当是其他参数的函数

$$D = f(\rho, \nu, p, U, \sigma_Y, K_I, d). \quad (6.80)$$

问题中的各参数的量纲列表如下(表6.18)。

Table 6.11 水力压裂参量的量纲

ρ	ν	p	U	σ_Y	K_I	d	D
mL^{-3}	L^2t^{-1}	$L^{-1}mt^{-2}$	Lt^{-1}	$L^{-1}mt^{-2}$	$L^{-1/2}mt^{-2}$	L	L

对于裂纹扩张的长度 D 问题，一共有8个参数，因为力学系统有时间、长度和质量3个基本量纲，所以可以构造5个 Π 。如果取 d, σ_y, U 为基本变量，这5个 Π 可以统一表示成 $\Pi_i = (\Psi_i)l^a \sigma_Y^b U^c$ ，其中 Ψ_i 分别取为 D, p, ρ, K_I, ν 。这样就有5个 Π ，即

$$\Pi_1 = \frac{D}{d}, \quad \Pi_2 = \frac{p}{\sigma_Y}, \quad \Pi_3 = \frac{\rho U^2}{\sigma_Y}, \quad \Pi_4 = \frac{K_I}{\sigma_Y \sqrt{d}}, \quad \Pi_5 = \frac{\nu}{Ud}. \quad (6.81)$$

这里的 Π_2 是压裂液静压与岩石屈服强度的比，为(静)破坏数； Π_3 是压裂液动压与岩石屈服强度的比，为动(破)坏数 J ； Π_4 是Irwin数 Ir 的倒数， Π_5 是Reynolds雷诺数 Re 的倒数；其中静压和动压可以合在一起为总压 $P = p + \frac{1}{2}\rho U^2$ 。这样，就有问题的无量纲关系

$$\frac{D}{d} = f\left(\frac{p}{\sigma_Y}, \frac{\rho U^2}{\sigma_Y}, \frac{K_I}{\sigma_Y \sqrt{d}}, \frac{\nu}{Ud}\right). \quad (6.82)$$

该式也或可写成

$$\frac{D}{d} = f\left(\frac{p + 1/2\rho U^2}{\sigma_Y}, \frac{K_I}{\sigma_Y \sqrt{d}}, \frac{\nu}{Ud}\right) = f\left(\frac{P}{\sigma_Y}, \frac{K_I}{\sigma_Y \sqrt{d}}, \frac{\nu}{Ud}\right). \quad (6.83)$$

用已知的无量纲数表示，裂纹扩张的长度 D 可写成更简单形式

$$D = df\left(J, \frac{1}{Ir}, \frac{1}{Re}\right). \quad (6.84)$$

这是一个一般公式。它反映了流体流动 Re 、岩石材料强度 Ir 和流固相互作用 J 对压裂尺寸的影响。由于，对应给定的岩石，Irwin数 Ir 是常数，所以只要模型使用与原型一样的压裂液流速，那么模型与原型的所有几何现状都是相似的，所以，流体压裂现象满足几何相似律。利用这个几何相似律，原则上便可利用小尺寸实验模拟大型压裂的形成效果。

6.9.2 不同情况的简化

从 Ir , Re , J 的定义看, Ir 是刻画岩石的断裂, Re 对应压裂液的流动, 而破坏数 J 反映压裂液总压对岩石的破坏能力。它们对不同的状态起不同的作用。

如果, 裂纹处于扩展状态, 即 Irwin 数 Ir 达到其临界值 Ir_c (常数), 这时压裂的几何相似律表达式(6.83), 可以简化成

$$D = lf(J, \frac{1}{Re}). \quad (6.85)$$

如果忽略压裂液的 Re , 这样上式可进一步简化成

$$D = df(J) = lf(\frac{P}{\sigma_Y}) = l \cdot f(\frac{p + \frac{1}{2}\rho U^2}{\sigma_Y}). \quad (6.86)$$

表达式(6.83)实际上表明, 问题的控制参数可以减少到4个, 即 d , P , σ_Y , D , 这样可进一步写成

$$D = df(J) = Cd(\frac{P}{\sigma_Y})^\alpha = Cd \cdot (\frac{p + \frac{1}{2}\rho U^2}{\sigma_Y})^\alpha. \quad (6.87)$$

从物理上理解, C 和 $\alpha > 0$ 为常数, 这些常数只能从实验获得。从扩展压裂过程的3个参数 Ir , Re , J 的影响看, 破坏数 J 起主导作用。

从以上压裂的发展过程知道, 原来的裂纹 d 将被填充, 而变成现在的裂纹 D ; 这个 D 又将被填充, 一直继续压裂, 裂纹也不断推进, 推进的长度与 D 服从相同的几何相似律(6.84)。

6.9.3 时间效应

应当指出, 岩石在压裂液的高压脉冲的作用下的断裂不是简单地发生在瞬间, 从微裂纹的形成、生长、互相连接, 直到形成宏观裂纹以致最终断裂, 需要经历一个发展过程。就是说岩石断裂有个特征破坏时间 t_p , 其量纲是时间 t 。考虑到岩石弹性能释放的最快速度就是其内的声速 $\sqrt{\frac{\sigma_Y}{\rho}}$, 这样在以前分析的基础上需要相应地增加了一个无量纲参数 Π_6

$$\Pi_6 = (\frac{d}{t_p}) / \sqrt{\frac{\sigma_Y}{\rho}} = \frac{d}{t_p} \sqrt{\frac{\rho}{\sigma_Y}}. \quad (6.88)$$

如果我们设 $d\sqrt{\frac{\rho}{\sigma_Y}} = t_c$ 作为岩石裂纹扩展的时间, 这样 $\Pi_6 = t_c/t_p$ 就是 Deborah 数 De 。Deborah 数越小, 材料特性越软; Deborah 数越大, 材料特性越硬。这样表达式(6.84)可以改写成

$$D = df(J, \frac{1}{Ir}, \frac{1}{Re}, De). \quad (6.89)$$

由于 De 中有长度尺度 d , 所以这时几何相似律不再成立。

6.9.4 结论

这里的结果由[90]获得。水力压裂的核心控制参量是总压, 即静压与动压之和, $P = p + \frac{1}{2}\rho U^2$ 。在不考虑特征时间时, 满足几何相似律; 但考虑特征时间时, 几何相似律不再成立。

CHAPTER 7

量纲分析的扩展

以上介绍的通常量纲分析除了(4.2)的难点外，还有些先天不足，比如说长度和速度的方向无法表示，这就使运用量纲分析处理一些固体力学问题时有一定的限制，在固体力学中量纲分析不很成功，量纲分析需要改进提高¹。这需要引进定向量纲的概念

另外有些问题中，其中一些 Π 非常大而同时有些 Π 又非常小，出现所谓的奇性问题。比如在以上的例子中曾看到雷诺 Re 很大的情况。这需要引进量纲分析的不完全相似概念。

7.1 定向量纲

通常量纲分析的一些不合理的地方：

1. 角度由于是无量纲量，它只能隐含在待定函数中，它本身无法进行量纲分析，比如研究机翼升力的攻角 α ，只能隐含地表现在函数 $f(\alpha)$ 中，但无法从中提取出来。
2. 所有的应变都是无量纲量，与角度类似其本身无法进行量纲分析，只能隐含在待定函数中，弹性应变与塑性应变无量纲也一样，无法区分开来。而固体力学中应变无处不在，这可能是通常量纲分析在固体力学中应用不理想的一个原因。

¹钱伟长，应用数学，安徽科学技术出版社,1993.

3. 有些物理量本身之间没有什么联系，但其量纲却相同，在量纲分析中无法把它们分开。例如物质质量和惯性质量的量纲都是 M ，无法区分它们；频率，应变率，角速度的量纲都是 t^{-1} ；所有Young弹性模量，剪切模量，应力的量纲都是 L^1Mt^{-2} ；导热系数和粘性系数的量纲都是 $L^{-2}Mt^{-1}$ ；角动量的变化率，能量和梁板壳弯矩的量纲都是 L^2Mt^{-2} 。
4. 基本单位最多只要 $j=7$ 个，力学系统的基本单位才有 $j=3$ 个(长度，质量和时间)，对于力学系统来讲，如果问题有 $n=4$ 个参量，就可以得到一个 Π ，这种情况是最好的，因为只有一个 Π ，它就只能是一个常数，所有的量就不再隐含在函数了，比如肥皂泡的例子 Π 就是一个常数。这里就出现一个问题，是不是可以在量纲分析的框架下，通过合理增加一些基本量纲，从而减少问题的 Π 个数，简化问题。

Huntley(1967)提出定向量纲(Directed Dimension)概念²，Siano (1985)提出(orientational analysis)取向分析^{3 4}

具体讲，Huntley的定向量纲基本思想有2点：

1. 考虑向量的大小和方向，原来只考虑大小。如沿x方向上的长度记成 L_x ，x坐标方向的速度记成 $V_x = L_x/t$ ，
2. 区分物质质量(M_i)和惯性质量(M_s)的量纲，

Siano的取向分析，特别引进方向符号 l_x, l_y, l_z 代表3个方向，没有方向的标量使用符号 l_0 。这样Huntley的 L_x 就可以表达成 $L_x = Ll_x$ 。也可以表示角度和三角函数等。

7.1.1 炮弹的水平距离

问题：炮弹在高处为 H 处用初始速度 V 平射，求抛到地面的水平距离 R ？炮弹在以 V 抛出后，在地球引力(重力)的作用小靠惯性飞行，这样问题的参量有 H, V, R 和重力加速度 g ，即有 $n=4$ 个参量。从中可以看出，这个问题的基本量纲是长度 L 和时

Table 7.1 参量的基本量纲

H	V	R	g
L^1	L^1t^{-1}	L^1	L^1t^{-2}

间,即 $j=2$ ，所以本问题有 $k=n-j=2$ 个无量纲 Π 。

$$\Pi_1 = RV^{a_1}H^{b_1} = R/H \quad (7.1)$$

$$\Pi_2 = gV^{a_2}H^{b_2} = gH/V^2 \quad (7.2)$$

所以有关系

$$R/H = f(gH/V^2) \quad (7.3)$$

²Huntley, H. E. (1967), Dimensional Analysis, Dover, LOC 67-17978

³Siano, Donald (1985), "Orientational Analysis - A Supplement to Dimensional Analysis - I", J. Franklin Institute 320 (320): 267, doi:10.1016/0016-0032(85)90031-6.

⁴Siano, Donald (1985), "Orientational Analysis, Tensor Analysis and The Group Properties of the SI Supplementary Units - II", J. Franklin Institute 320 (320): 285, doi:10.1016/0016-0032(85)90032-8.

这就是使用通常量纲分析获得的结果。关系(7.3)只能告诉我们水平距离R与初始高度H成正比，无法给出与初始速度的明确关系信息，我们不满足这个结果，希望获得更多的信息。

让我们区分速度的方向，以及水平距离和高度方向。这样问题的参量有H,V,R和重力加速度g，即有n=4个参量。这样同一个问题，仍然有4个参量，但基本量纲

Table 7.2 参量的基本量纲

H	V	R	g
L_y^1	$L_x^1 t^{-1}$	L_x^1	$L_y^1 t^{-2}$

多了，现在是3个(L_x, L_y, t),这时就只有一个无量纲Π

$$\Pi = RV^a H^b g^c = RV^{-1} \sqrt{g/H} \tag{7.4}$$

由于(7.4)只有一个Π，所以这个Π必须是常数C，问题的解答是

$$R = CV \sqrt{H/g} \tag{7.5}$$

讨论：(7.5)只要一个待定常数，物理关系非常简单，R与H的关系是抛物线关系，理论推导知道其中的C=2。

7.1.2 弹性线的振动能量

一条长度l的弹性线在拉紧的状态下沿垂直与线的方向做横行振动，振幅是A，频率是ω，弹性线单位长度的质量是ρ，请用量纲分析求弹性线的振动动能K。

这个问题按通常量纲分析可以得到振动动能 $K = \omega^2 \rho l^3 f(A/l)$ ，函数f需要待定。

我们可以利用扩展后的量纲方法，通过区分方向性，重新推导。显然，如果弹性线的方向是x轴方向，振动方向就是垂直的y方向，横向振动方向也是y方向。这样就有个参数的量纲。

Table 7.3 参量的基本量纲

K	ω	A	l	ρ
$m L_y^2 t^{-2}$	t^{-1}	L_y^1	L_x^1	$m L_x^{-1}$

这样就增加了基本量纲的个数，现在有 L_x, L_y, t, m ，即有j=4。所以有一个Π。

$$K = C \omega^2 \rho l A^2 \tag{7.6}$$

动能关系(7.6)中只有一个待定常数，其他参量都是以明确的幂次方显示出来，理论推导可以得到 $C = 1/2$ 。

7.1.3 弹性圆球的接触问题

设一弹性圆球和另一个大小相等，材料相同的弹性圆球接触，球的半径为R，弹性模量为E，设接触的压力为P，求：(a)接触面积的半径r，(b)两球互相压进而靠近的距离δ。

这个问题用一般的量纲分析是无法得到任何结果的。现在用改进了的量纲分析方法来求。由于轴对称性，取轴向的长度量纲为 L_z ，垂直于轴向的长度量纲为 L_r 。

这里要特别说明半径 R 和弹性模量 E 的量纲表示问题。对于这个问题的球半径 R ，对于接触问题， R 在这里只是表示接触点的曲率半径。根据曲率半径的定义， $1/R = d\theta/ds$ ， s 的量纲是 L_r ， θ 的量纲是 L_z/L_r ，所以 R 的量纲

$$[R] = [L_r^2 L_z^{-1}]. \quad (7.7)$$

同样，对于接触问题，弹性模量 E 的本质是在接触点承受剪应力，所以它是在方向 L_z 的剪切模量的性质，其作用面平行于 L_z ，于是 E 的量纲是

$$[E] = [mL_z t^{-2}] / [L_z L_r] = [mL_r^{-1} t^{-2}]. \quad (7.8)$$

问题(a)有4个变量，有量纲列表(表4.4)。

Table 7.4 弹性圆球的接触问题(a)参量的量纲

r	P	R	E
L_r	$mL_z t^{-2}$	$L_r^2 L_z^{-1}$	$mL_r^{-1} t^{-2}$

问题(a)有4个变量，有3个基本量 R, P, E ，这样只有一个 Π ，即

$$\Pi = r R^\alpha P^\beta E^\gamma = L_r (L_r^2 L_z^{-1})^\alpha (mL_z t^{-2})^\beta (mL_r^{-1} t^{-2})^\gamma, \quad (7.9)$$

其指数方程为

$$1 + 2\alpha - \gamma = 0, \quad -\alpha + \beta = 0, \quad \beta + \gamma = 0, \quad (7.10)$$

可以求出

$$\alpha = -\frac{1}{3}, \quad \beta = -\frac{1}{3}, \quad \gamma = \frac{1}{3}. \quad (7.11)$$

于是有

$$\Pi = r \left(\frac{E}{PR} \right)^{1/3} \quad (7.12)$$

由于只有一个 Π ，所以 Π 必须是一个常数，所以可以得到球接触面积的半径为

$$r = c_1 \left(\frac{PR}{E} \right)^{1/3} \quad (7.13)$$

其中 c_1 是常数。

问题(b)也有4个变量，有量纲列表(表4.5)。

Table 7.5 弹性圆球的接触问题(b)参量的量纲

δ	P	R	E
L_z	$mL_z t^{-2}$	$L_r^2 L_z^{-1}$	$mL_r^{-1} t^{-2}$

问题(b)有4个变量，有3个基本量 R, P, E ，这样只有一个 Π ，即

$$\Pi = \delta R^\alpha P^\beta E^\gamma = L_r (L_r^2 L_z^{-1})^\alpha (mL_z t^{-2})^\beta (mL_r^{-1} t^{-2})^\gamma. \quad (7.14)$$

可以求出

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = -\frac{2}{3}, \quad \gamma = \frac{2}{3}. \quad (7.15)$$

于是有

$$\Pi = \delta \left(\frac{RE^2}{P^2} \right)^{1/3}. \quad (7.16)$$

由于只有一个 Π ，所以 Π 必须是一个常数，所以可以得到球接触面积的半径为

$$\delta = c_2 \left(\frac{P^2}{E^2 R} \right)^{1/3}. \quad (7.17)$$

其中 c_2 是常数。

CHAPTER 8

相似论

介绍量纲分析的目的不仅是为了从宏观上把握问题中各参量的关系和处理整理数据，还有一个重要的目的就是指导在做模型实验时如何进行真实的比拟。比如说一个物体很大，不好做实验，你按尺寸等比例把它缩小，就是几何变小了，如果在这个物体上还有力的作用，这时力如何变化才能与原来实际尺寸时的力学条件相似？这就需要相似论的知识，这里简单介绍有关内容，进一步学习可以参考钱伟长(1993)《应用数学》。

8.1 相似论基本概念

比如一个物体的长方形表面两边分别为 a, b , 面积是 $A = a \times b$ 上有垂直作用力 F , 表面的分布应力就是 $\sigma = F/A = F/(ab)$, 如果两边长度同时缩小 α 倍, 这样面积就变成 $A' = \alpha a \times \alpha b = \alpha^2 ab = \alpha^2 A$, 相应的应力变化是 $\sigma' = F/A' = F/(\alpha^2 A) = 1/\alpha^2 F/A = 1/\alpha^2 \sigma$ 。可以看出这时如果不改变力的比例, 得到的应力是要缩小 $1/\alpha^2$ 倍, 这样就不能完全模拟真实的应力情况, 所以在实验也要同时把模型中的力作相应的缩小, 倍数是 $1/\alpha^2$, 即模型中力应当是 $F' = F/\alpha^2$ 。从这个例子可以看出, 长度变化和面积的几何变化比例, 与应力和力的变化比例不同, 前者是属于几何相似问题, 后者属于物理相似。由于它们之间必须满足一定的物理关系, 所以它们不能任意变化而需要相互协调满足一定的条件。

如果一个物理量 X 变化 c 倍成为 X' , 即 $x' = cx$, 我们就说 X 与 X' 相似, c 为相似常数。比如, 我们加速度相似数 $c_a = a'/a$ 。力相似数 $c_F = F'/F$ 和质量相似数 $c_m =$

m'/m , 这样对于两个力学系统, 都满足Newton定律, 即

$$F = ma \quad (8.1)$$

$$F' = m'a' \quad (8.2)$$

方程(8.2)就变成

$$c_F/c_m c_a F = ma \quad (8.3)$$

由于物理公式的形式在任何变换后都必须保持不变, 所以系数

$$c = c_F/c_m c_a = 1 \quad (8.4)$$

考虑时间相似常数 $c_t = t'/t$, 速度相似常数 $c_v = v'/v$, 所以加速度相似常数为

$$c_a = c_u/c_t \quad (8.5)$$

这样就有相似条件

$$c = c_F c_t / c_m c_u = 1 \quad (8.6)$$

$c = c_F c_t / c_m c_u$ 就是相似数。相似数为1是一般性的, 这样就有相似论第一定理。

Theorem 8.1 相似论第一定理

不同物理系统相似的条件是相似数等于1。

这个定理首先由Newton(1686)在他的《哲学原理》中提出, 此后又被法国学者G. Bertrand (1848)肯定。

方程(8.6)可以改成

$$F't'/m'u' = Ft/mu = k = constant \quad (8.7)$$

k 称为相似模数, 称为Newton模数 Ne 。上式表明两个系统相似的条件是相关的相似模数相等, 这是第一定理的另外一种表述。

这里的相似模数 k , 显然是个无量纲量, 其实就是量纲分析中的 Π , 但在量纲分析时没有考虑问题的物理方程, 所以它是不唯一的。在相似论中通过物理方程来选择 Π , 因此, 相似模数是适合物理方程要求的 Π 。

第一定理还不能保证物理相似, 需要进一步制约。

Theorem 8.2 相似论第二定理

物体物理相似的条件是所有的 Π_1 和相似模数都要相等。

如果一个系统有几个 Π , 要想得到问题的实验结果不必须让它们完全相等; 但有时让它们完全相等很难做到, 这时就必须具体问题具体分析, 简化或首先满足首要相似条件, 即合理的相似条件的松弛也是准许的。

有时一个 Π 想完全相等技术上都不容易做到, 比如雷诺数(Reynolds number) Re 。但为了特殊需要, 国家层面不得不投入巨资开放, 可变密度的风洞就是一个例子。

从前面知道雷诺数 Re 的定义是

$$Re = \rho LV / \mu \quad (8.8)$$

其中的 L 为特征长度， V 为特征速度， μ 是粘性系数， ρ 是空气的密度。

雷诺数 Re 是研究流场的一个重要特征数。当使用缩小尺寸的飞机模型在风洞中试验时，必须保证与实际飞机在空气中飞行有着相似的流动，也就是说，它们必须有相同的几何形状和相同的雷诺数。由于在管内流场中的雷诺数与流体密度、速度和管直径的大小的乘积成正比，与流体粘度成反比。所以，如果希望获得高的雷诺数，在尺寸不能放大的情况下，办法显然是提高速度，或增加密度或减少粘度，高雷诺数对于超高速飞行器的研发非常重要。Max M. Munk提出可变密度的风洞¹的概念，并在美国兰利航空实验室建造了世界第一个可变密度的风洞，为航空器的发展做出了巨大的贡献。

8.2 弹性梁的挠度

设有一个弹性梁，长度为 l ，抗弯刚度是 D ，梁的挠度为 $w(x)$ ，梁上的分布荷载为 $q(x)$ ，坐标 x 与梁轴重叠。弹性梁小变形的方程是

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x) \quad (8.9)$$

两端固定的边界条件：

$$x = -l/2: w = 0, dw/dx = 0 \quad \text{和} \quad x = l/2: w = 0, dw/dx = 0$$

如果用相似常数的方法，设有另外一个梁的 q', w', x', D' 与方程(8.9)相似，满足方程

$$D' \frac{d^4 w'}{dx'^4} = q'(x) \quad (8.10)$$

其中($q' = c_q q, w' = c_w w, x' = c_x x, D' = c_D D$)，这样方程(8.10)可改写成

$$\frac{c_D c_w}{c_x^4 c_q} D \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x) \quad (8.11)$$

其中相似数 $c = \frac{c_D c_w}{c_x^4 c_q}$ ，根据相似论第一定理，有

$$c = \frac{c_D c_w}{c_x^4 c_q} = 1, \quad \text{or} \quad \frac{D w}{L^4 q} = k. \quad (8.12)$$

其中 k 是相似模数，即这个问题的 Π 。

如果取梁中心($x=0$)处的挠度为 w_0 ，平均分布荷载为 q_0 ，并引入无量纲参量

$$Q = q/q_0, \quad W = w/W_0, \quad X = x/l, \quad (8.13)$$

方程(8.9)可以改写成

$$\frac{D w_0}{l^4 q_0} D \frac{d^4 W}{dX^4} = Q(X), \quad (8.14)$$

¹Anderson, John David (1999). A history of aerodynamics and its impact on flying machines. Cambridge University Press. p. 290. ISBN 0-521-66955-3. Retrieved July 21, 2010.

两端固定的边界条件相应变成:

$$X = -1/2: W = 0, dW/dX = 0 \text{ 和 } X = 1/2: W = 0, dW/dX = 0$$

其中 $k_1 = \frac{Dw_0}{l^4q_0}$ 就是这种情况下的相似数。这样方程(8.14)的解就是

$$\frac{Dw_0}{l^4q_0}W(X) = f(X). \quad (8.15)$$

或写成

$$W(X) = \frac{Dw_0}{l^4q_0}f(X). \quad (8.16)$$

这个解虽然还没有最终确定 $f(X)$ 的具体形式, 但已经可以看出重要信息, 如 $W(X)$ 的形状只与 $f(X)$ 有关, 而无荷载 q 的大小无关! 从而得到

$$w(x) = w_0W(x/l) = \frac{Dw_0}{l^4q_0}f(x/l). \quad (8.17)$$

特别要指出, 弹性梁问题的相似数在不同的荷载和边界条件情况下是不同的, 例如梁没有分布荷载作用只在梁端有弯矩作用, 这种情况 $q=0$, 显然以上的 k_1 已经不能使用, 这时的相似数可以通过在梁端的弯矩条件确定, 可得相似数 $k_2 = Dw_0/(l^2M)$, 其中 M 为一端边界上的外加弯矩, 可见相似数的确可以反应梁的荷载和边界条件情况。

8.3 相似变量

相似论除了可以协助模型实验, 确定不同情况下的相似数, 也可以对变量找到进行变换的关系, 如梁纲分析点源爆炸时, 已经看到到双坐标 (r,t) 转化成 ξ 。作为这本小册子的结尾, 这里在介绍一个重要的流体边界层的例子。

1904年德国科学家Prandtl在其著名论文Fluid Flow in Very Little Friction²首次注意到大雷诺数时粘性的重要性, 并提出了边界层概念。在此以前都不考虑流体粘性, 所以那时的流体力学基本是数学的一部分, 不能解决工程问题, 与应用实际没有什么关系。边界层提出后情况发生了巨大变化, 推动了流体力学的大发展, 所以Prandtl也被公认为近代力学之父。

Prandtl利用量纲分析, 把二维流体力学的Navier-Stokes方程组进行了较大地简化, 对不考虑时间效应的定常流动, 简化后的方程组是

$$u\partial u/\partial x + v\partial u/\partial y = \mu\partial^2 u/\partial y^2 \quad (8.18)$$

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0 \quad (8.19)$$

边界条件

$$y = 0: u = v = 0 \quad (8.20)$$

$$y = \infty: u = u_0 \quad (8.21)$$

²Prandtl, L., Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandlungen d. III. Internat. Math. Kongr. Heidelberg, 8.-13. Aug. 1904, B. G. Teubner, Leipzig 1905, pp. 485-491 (In [50]: p. 575)

其中 u, v 为流体速度在 x, y 方向上的分量, u_0 为来流速度。这是个非线性偏微分方程组, 也不好求解。Prandtl 的学生Blasius(1908) 非常巧妙的引入相似变量把以上方程组进行了简化³。

这个问题一共有2个自变量 x, y ; 2个因变量 u, v , 我们把它们同时进行相似变换, 如

$$U = u/u_0, V = v/v_0, \xi = x/x_0, \eta = y/y_0 \quad (8.22)$$

这样方程组(8.19,8.19)改写成

$$U\partial U/\partial\xi + v_0x_0/(u_0y_0)V\partial U/\partial\eta = \mu x_0/(u_0y_0^2)\partial^2 U/\partial\eta^2 \quad (8.23)$$

$$\partial U/\partial\xi + v_0x_0/(u_0y_0)\partial V/\partial\eta = 0 \quad (8.24)$$

可以看出, 变换后的发出组中有2个相似常数, 按相似论, 它们应当等于1。又有历史上原因, 我们采用Blasius的做法, 相似常数为1的条件改写成, 把常数 μ 吸收进来

$$v_0x_0/(u_0y_0) = 1, \mu x_0/(u_0y_0^2) = 1 \quad (8.25)$$

方程组(8.27,8.27)变成

$$U\partial U/\partial\xi + V\partial U/\partial\eta = \partial^2 U/\partial\eta^2 \quad (8.26)$$

$$\partial U/\partial\xi + \partial V/\partial\eta = 0 \quad (8.27)$$

从关系(8.25)可知, u_0, v_0, x_0, y_0 只有2个是独立的, 如果选择 u_0, x_0 , 就可以得到 $y_0 = (\mu x_0/u_0)^{1/2}, v_0 = \mu/y_0$, 这样就有关系

$$\alpha = \eta/\xi^{1/2} = y(u_0/\mu x)^{1/2} \quad (8.28)$$

所以原来是变量 x, y 的偏微分方程组(8.19,8.19), 就可以变成 ξ, η 的偏微分方程组(8.27,8.27), 利用(8.28)并引入 $U = 2df/d\alpha, V = \alpha df/d\alpha - f$ 后, (8.27,8.27)就变换成一个变量 α 的常微分方程

$$d^3 f/d\alpha^3 + f d^2 f/d\alpha^2 = 0 \quad (8.29)$$

相应的边界条件变成

$$\alpha = 0: f = df/d\alpha = 0 \quad (8.30)$$

$$\alpha = \infty: df/d\alpha = 1/2 \quad (8.31)$$

非线性方程(8.29)只求得了数值结果, 至今还没有得到解析解。Prandtl指导Blasius求解了这个边界层问题, 其结果包括在Blasius(1907)的博士论文中⁴。

如果你有机会阅读Blasius一百多年前的博士论文, 再翻阅之后的流体力学书籍并对比, 你会发现这个问题的描述和求解完全出自其博士论文, 至今未变, 后来的所有边界层问题摩阻计算都以此为基础, 可见这个问题和解的重要性。

³Blasius, H. (1908). "Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung". Z. Math. Phys. 56: 1 - 37.

⁴Blasius H (1907) Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. PhD Dissertation, University of Göttingen

CHAPTER 9

量纲分析的不完全相似问题

以上讨论的量纲分析属于完全相似的情况，如果其中的无量纲 Π 趋于无限大或零，这时的量纲分析属于非完整相似情况，这种情况的相似性一般将被破坏。为了也可以近似处理这类问题的相似性，G.Barenblatt(1994)¹提出一种处理这类相似性的渐进方法。

其基本思想是，比如，不失一般性这里只举有3个 Π 的情况。如一个问题按正常操作得到无量纲关系

$$\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3) \quad (9.1)$$

假如在 $\Pi_2 \rightarrow 0$ 的情况下 Π_1 的极限存在，现在的问题是 Π_1 可以是什么形式？类似使用函数的Taylor级数展开，Barenblatt建议(9.1)改成如下形式

$$\Pi_1 = (\Pi_2)^\alpha f(\Pi_3) \quad (9.2)$$

其中(9.2)的幂次 α 是待定常数。

如果 $\Pi_3 \rightarrow \infty$ 的极限也存在，(9.2)可以改写成

$$\Pi_1 = (\Pi_2)^\alpha f(\infty) \quad (9.3)$$

显然， $f(\infty)$ 必须是一个常数。

¹Barenblatt, G. I. (1979), Similarity, self-similarity, and intermediate asymptotic. Consultants Bureau, Plenum Press, New York and London, xvii+218 pp.

62 量纲分析的不完全相似问题

利用这个思想，Barenblatt重新处理了一些老问题，如点源爆炸和层流边界层的摩阻等问题。

REFERENCES

1. Fourier J.B.J. *Analytic Theory of Heat*[M]. New York:Dover Publications, 1955.
2. Maxwell J.C. *A Treatise on Electricity and Magnetism*[M]. Cambridge:Clarendon Press,1891; New York:Dover Publications, 1954.
3. Buckingham E. On physically similar systems: illustration of the use of dimensional equations[J]. *Phys. Rev.* 1914, 4:345 - 376.
4. Buckingham E. The principle of similitude[J]. *Nature.* 1915,96:396-397.
5. Bridgman P.W. *Dimensional Analysis*[M]. New Haven:Yale University Press, 1922.
6. Riabouchinsky P. On principle of similitude-Letter to the editor[J]. *Nature*, 1915, 95:591.
7. L. Prandtl, Bericht uber die entstehung der turbulenz. *Z. Angew. Math. Mech* 5, 136(1925).
8. Taylor G.I. British Report RC-210, June 27, 1941.
9. Taylor G.I. The formation of a blast wave by a very intense explosion. I. Theoretical discussion, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 1950, 201(1065):159-174.
10. G.I. Taylor, The formation of a blast wave by a very intense explosion: II. The atomic explosion of 1945. *Proceedings of the Royal Society. Series A* 1950, 201(1065):493 - 509.
11. Kolmogorov, A.N. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1941,30:299-303.
12. Kolmogorov, A.N. Dokl. Dissipation of energy in locally isotropic turbulence. *Akad. Nauk SSSR.* 1941, 32:16-18.
13. Huntley H. E. *Dimensional Analysis.* Dover,1967.
14. P. G. de Gennes, *Scaling Concepts in Polymer Physics.* Cornell University Press,1979.
15. Barenblatt, G.I. *Similarity, self-similarity, and intermediate asymptotics.* New York:Consultants Bureau, Plenum Press, 1979.

16. Siano D. *Oriental Analysis - A Supplement to Dimensional Analysis - I*. J. Franklin Institute. 1985,320(320):267.
17. Siano D. *Oriental Analysis - Tensor Analysis and The Group Properties of the SI Supplementary Units - II*. J. Franklin Institute. 1985, 320(320):285.
18. Ain A. Sonin, A generalization of the Π -theorem and dimensional analysis. PNAS June 8, 2004 101 (23) 8525-8526
19. Birkhoff, G. *Hydrodynamics*. Princeton:Princeton University Press, 1950.
20. Ovsiannikov, L.V. *Group Analysis of Differential Equations*[M]. Moscow:Nauka, 1962. English translation by Ames, W.F. (ed.), New York:Academic Press, 1982.
21. Bluman, G. W. and Anco, S. *Symmetry and Integration Methods for Differential Equations*[M]. New York:Springer-Verlag,2002.
22. 孙博华, 量纲分析和Lie群, 高等教育出版社(2016)
23. Cantwell, B.J. *Introduction to Symmetry Analysis*. Cambridge:Cambridge University Press, 2002.
24. 郑哲敏. 从数量级和量纲分析看煤与瓦斯突出的机理. 力学与生产建设, 北京: 北京大学出版社, 1982.
25. 郑哲敏. 连续介质力学与断裂. 力学进展. 1982, 12(2):133-140.
26. Lin K, Zhao Y P. Mechanical peeling of van der Waals heterostructures: Theory and simulations. *Extreme Mechanics Letters*, 2019, 30: 100501.
27. 谈庆明. 量纲分析. 合肥: 中国科技大学出版社, 2007.
28. Richardson, L.F. *Weather Prediction by Numerical Process*. Cambridge University Press,1922.
29. Bohua Sun, The temporal scaling laws of compressible turbulence. *Modern Physics Letters B*, Vol. 30, No. 23 (2016) 1650297
30. Bohua Sun, Scaling laws of compressible turbulence, *Appl. Math. Mech. -Engl. Ed.*, 2017,38(6): 765 - 778
31. Bohua Sun, Scaling laws of aquatic locomotion, *Sci. China-Phys. Mech. Astron.*, 60(10), 104711 (2017)
32. Bohua Sun, Capillary wrinkling scaling laws of floating elastic thin film with a liquid drop, *Sci. China Phys. Mech. Astron.* 61:024721 (2018)
33. Bohua Sun, Kepler' s third law ofn-body periodic orbits in a Newtonian gravitation field, *Sci. China-Phys. Mech. Astron.*61, 054721 (2018)
34. Bohua Sun, Universal scaling laws of origami paper springs. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*. 9 (2019) 409-412
35. 钱伟长. 应用数学[M]. 合肥: 安徽科学技术出版社, 1993.
36. Isenberg C. *The Science of Soap Films and Soap Bubbles*[M]. New York: Dover, 1992.
37. Yunus A. Çengel and John M. Cimbala, *Fluid mechanics fundamentals and applications*[M]. New York:The McGraw-Hill Education, 2010.
38. Anderson, J. *Hypersonic and High-Temperature Gas Dynamics*[M]. AIAA Education Series. 2006.
39. Oswatitsch, K. *Antriebe mit Heizung bei Überschallgeschwindigkeit*[R]. Köln/Opladen:Westdeutscher Verlag. 1959, DVL-Bericht Nr. 90.
40. Rayleigh L. The Principle of Similitude[J]. *Nature*. 1915, 95:66-68.
41. Huntley H. E. *Dimensional Analysis*[M]. Dover,1967.
42. Siano D. *Oriental Analysis - A Supplement to Dimensional Analysis - I*[J]. J. Franklin Institute. 1985,320(320):267.

43. Siano D. Orientational Analysis - Tensor Analysis and The Group Properties of the SI Supplementary Units - II[J]. J. Franklin Institute. 1985, 320(320):285.
44. Barenblatt, G.I. Similarity, self-similarity, and intermediate asymptotics[M]. New York: Consultants Bureau, Plenum Press, 1979.
45. Anderson J.D. A history of aerodynamics and its impact on flying machines[M]. Cambridge University Press. 1999.
46. Prandtl, L. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandlungen d. III[C]. Internat. Math. Kongr. Heidelberg, 8.-13. Aug. 1904, B. G. Teubner, Leipzig 1905, pp. 485-491 (In [50]: p. 575).
47. Blasius H. Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung[D]. PhD Dissertation, University of Göttingen, 1907.
48. Taylor, G.I. A Formulation of Mr. Tuck's conception of Munroe Jets (1943)[R]. Scientific. Papers of G.I. Taylor, New York: Cambridge University Press. 1962, 358 - 362.
49. Taylor G.I. British Report RC-210, June 27, 1941.
50. Taylor G.I. The formation of a blast wave by a very intense explosion. I[J]. Theoretical discussion, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, 1950, 201(1065):159-174.
51. G.I. Taylor, The formation of a blast wave by a very intense explosion: II[J]. The atomic explosion of 1945. Proceedings of the Royal Society. Series A 1950, 201(1065):493 - 509.
52. 戴兰宏. 工程科学前沿的拓荒者—郑哲敏[J]. 力学进展. 2013, 43(3):265-294.
53. 郑哲敏. 破甲过程初步分析及一些基础知识[J]. 力学情报. 总第23期. 1973, 5:36-74.
54. 郑哲敏. 聚能射流的稳定性问题. 中国科学院力学研究所研究报告. 1977.
55. Crady, D.E. Fragmentation of rapidly expanding jets and sheets[J], Int. J. Impact Engineering. 1987, 5:285-292.
56. 谈庆明. 高速冲击模型律[C]. 冲击动力学进展王礼立等编. 合肥: 中国科技大学出版社, 1992:303-320.
57. 孙博华. 聚能射流的稳定性问题的一个注记[R/OL]. DOI:10.13140/RG.2.1.1928.3284. (2015-12-1) <https://www.researchgate.net/publication/285322318>.
58. 孙博华. 射流和薄板的快速动力扩展断裂问题的一个注记[R/OL]. DOI: 10.13140/RG.2.1.3697.8004. (2015-12-1) <https://www.researchgate.net/publication/285322534>.
59. 谈庆明. 量纲分析[M]. 合肥: 中国科技大学出版社, 2007.
60. Tan Qingming(谈庆明). Dimensional Analysis[M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.
61. 郑哲敏. 连续介质力学与断裂[J]. 力学进展. 1982, 12(2):133-140.
62. 赵亚溥. 断裂力学中的相似方法及尺度律[J]. 力学与实践. 1995, 17(5):11-16, 80.
63. 李青, 王天舒, 马兴瑞. 充液航天器液体晃动和液固耦合动力学的应用, 力学进展, 2012, 42(4):472-480.
64. Abramson N.H., Ransleben G. E. Jr. Simulation of Fuel Sloshing Characteristics in Missile Tanks by Use of Small Models[J]. Amer. Rocket Soc. Jour., 30 (1960) pp.603-613.
65. 孙博华. 航天器液体推进剂的晃动问题[R/OL]. DOI: 10.13140/RG.2.1.3435.6565. (2015-12-1) <https://www.researchgate.net/publication/285322551>.
66. Fay, J.A. The spread of oil slicks on a calm sea[C]. In D. P. Hault [ed.], Oil on the sea. Plenum. New York, 1969:53-63.
67. Richardson, L.F. Weather Prediction by Numerical Process[M]. Cambridge University Press, 1922.

68. Wang, J. Cascade of Kinetic Energy and Thermodynamic Process in Compressible Turbulence[R], Postdoctoral Research Report, Peking University, June, 2014.
69. Kadomtsev, B. B. and Petviashvili, V. I. Acoustic turbulence. Soviet Physics Doklady[J]. 1973, 18:115-118.
70. Moiseev, S.S. Toor, A.V. and Yanovsky, V.V. The decay of turbulence in the burgers model. Physica D **2**, 187-193(1981).
71. Shivamoggi, B.K. Multifractal Aspects of the Scaling Laws in Fully Developed Compressible Turbulence[J]. Annals of Physics. 1995, 243:169-176.
72. Barenblatt, G.I. Dimensional Analysis[M]. New York: Gordon and Breach, 1987.
73. Barenblatt G. I. Scaling, Self-similarity, and Intermediate Asymptotic[M]. Cambridge University Press, 1996.
74. Sun, B. The spatial scaling laws of compressible turbulence[R/OL]. arXiv:1502.02815v2 [physics.flu-dyn], 2015.
75. Sun, B. The Scaling Laws of Compressible Turbulence. Fourth African Conference on Computational Mechanics. Marrakech, Morocco, 7-9 January, 2015.
76. Sun, B. The Temporal Scaling Laws of Compressible Turbulence, The 3rd Int. Workshop on Nonlinear and Modern Mathematical Physics, 9-11 April, 2015, Cape Town, South Africa.
77. Lighthill, M.J. On Sound Generated Aerodynamically. I. General Theory[J]. Proc. R. Soc. Lond. A. 1952, 211:564-587.
78. Lighthill, M.J. On Sound Generated Aerodynamically. II. Turbulence as a Source of Sound[J]. Proc. R. Soc. Lond. A. 1954, 222:1-32.
79. Sun, B. Universal scaling laws on sound generated aerodynamically[C]. The 23rd International Congress on Sound and Vibration, Athens, Greece, 10-14 July 2016.
80. 孙博华. 湍流噪声的统一标度率[R/OL]. DOI: 10.13140/RG.2.1.2256.0084. (2015-12-1) <https://www.researchgate.net/publication/285322384>.
81. Clark, R.W. The Birth of the Bomb: The Untold Story of Britain's Part in the Weapon That Changed the World, 1961.
82. von Neumann, J. NDRC[R] Div. B, Report AM-9, June 30, 1941.
83. von Neumann, Blast Wave, Los Alamos Sci. Lab. Tech. Series, Vol.7, Part 2, H. Bethe, ed., August 13, 1947, LA-2000.
84. Sedov, L.I. Propagation of strong blast waves, Prikladnaya Matematika i Mekhanika[J]. Appl. Math. Mech., Leningrad). 1946, 10:241 - 250.
85. Sedov L. I. Similarity and Dimensional Analysis in Mechanics[M]. New York: Academic Press, 1959.
86. 王振亭, 郑晓静. 草方格沙障尺寸分析的简单模型[J]. 中国沙漠. 2002, 22(3):229-232.
87. 孙博华. 复杂力学问题的分析[R]. 北京科技大学学术报告. 2014年9月北京.
88. 孙博华. 沙漠治理中草方格的障沙问题的标度率[R/OL]. DOI: 10.13140/RG.2.1.4877.4485. (2015-12-1) <https://www.researchgate.net/publication/285322401>.
89. Sun, B. The similarity laws of MEMS gyro with temperature compensation[C]. The 21st International Congress of Sound and Vibration, Beijing, 2014.
90. 孙博华. 水力压裂问题的标度率[R/OL]. DOI: 10.13140/RG.2.1.1993.8647. (2015-12-1) <https://www.researchgate.net/publication/285322686b>.

CHAPTER 10

思考题

- 10.1 请列出你的学科中知道的物理量的量纲。
- 10.2 一个微信中的笑话，请审查这样的“白日做梦”能实现吗？
1分=0.01元=0.1元X 0.1元=1角X 1角=10分X 10分=100分=1元。
- 10.3 利用量纲一致性原理，从Newton万有引力定律 $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ 导出G的量纲，其中G即是万有引力常数。
- 10.4 请使用量纲分析求弹性线在拉紧状态下的振动频率 ω ，设弹性线长度 l ，单位长度的密度 ρ ，线的拉力 F ，这里不考虑抗弯刚度。
- 10.5 考虑是否可以使用方向量纲修改管中的流动摩擦阻力的公式。
- 10.6 考虑是否可以使用方向量纲修改机翼升力的公式。
- 10.7 知道量子力学的Planck 常数 h ，光速 c ，引力常数 G ，和Boltzmann constant k 。请用这4个量组合成以下几个尺度：Planck mass m_P ，Planck time t_P ，Planck length ℓ_P ，Planck energy E_P ，Planck temperature T_P
- 10.8 在分子熔体中运动的悬链上的阻力 (P.G.Gennrs)。
- 10.9 蛇行运动的阻力(Reptation friction)。
- 10.10 在沙子中摆动运动的标度律 (scaling laws of locomotion in granular media)。

10.11 考虑表面张力 γ 作用的物体浮力公式。

10.12 单摆的振动周期问题。单摆固定一端，自由端有一质量为 m 的集中质量，摆的长度是 l ，不计摆的质量，变形和空气摩擦阻力，初始方位角是 α 单摆在重力作用下自由摆动，求振动周期 T 。

[提示： $T = \sqrt{l/g}f(\alpha)$ ，微小振动时 $f(\alpha) \approx f(0) = 2\pi$]

10.13 薄板在高速射流冲击下撕裂问题。假设薄板抵抗变形的参数是屈服极限 Y ，有个聚能穿甲弹，假设在初始时刻，有一直径为 d_0 的细长金属射流，射流密度是 ρ ，以非常高的速度 v_0 冲击与其运动方向垂直的薄板，显然薄板将被撕裂甚至击穿，请求撕裂的长度 d_b 和发生断裂的时间 t_b 。

[提示： $d_b = d_0 f_1(v_0 \sqrt{\rho/Y})$, $t_b = d_0 (\rho/Y)^{1/4} f_2(v_0 \sqrt{\rho/Y})$](参考Candy论文)¹

10.14 Rayleigh低速绕流换热问题。假设流体没有粘性，来流速度 v 比较小，固体的特征长度是 l ，来流的流体相对于固体有温度差 θ ，流体的热容量参数 c ，流体导热系数是 λ ，问题是：在单位时间里流体给于固体的容量 Q 有多大？

[提示： $Q = \lambda l \theta f(lvc/\lambda)$]²

10.15 The equation describing the free fall of a body: $d^2z/dt^2 = g$, where g is the gravitational acceleration felt near the Earth's surface and z is the height of the body. There are two initial values: the body's initial velocity v_0 and its initial height z_0 . Defining dimensionless variables in terms of these parameters, $y = z/z_0$ and $\tau = t/(z_0/v_0)$, the differential equation reads $d^2y/d\tau^2 = (gz_0)/(v_0)^2$, where the right-hand side is dimensionless. Writing the equation this way we see that there is really only one parameter in the problem; doubling the initial velocity may be counterbalanced by increasing z_0 by a factor of four to give the exact same trajectory in dimensionless units. Find the dimensionless parameter³.

[提示：In fact, this dimensionless number is an instance of the so-called Froude number used in fluid dynamics, $Fr = v_0/\sqrt{gz_0}$.]

10.16 利用量纲分析推导动物脚的尺度与身体高度的标度律？

[提示：脚的尺度 λ 与身体高度 H 的标度律是 $\lambda = const.H^{3/2}$ 。对于人， $const \approx 0.01212767$.]

10.17 给定一只鸡，重量是 W ，需要使用微波炉烤，利用量纲分析推导需要的微波时间？

[提示：微波时间 τ 与重量是 W 的标度律是 $\tau = const.W^{2/3}$.]

10.18 动物新陈代谢过程，产生的热量 Q 与其重量 W 的标度律。

[提示：产生的热量 Q 与其重量 W 的标度律 $Q = const.W^{3/4}$.]

¹Candy, D.E., Fragmentation of rapidly expanding jets and sheets, Int. J. Impact Engineering, 1987, Vol.5:285-292.

²Rayleigh, Lord, The Principle of Similitude; Nature, vol. 95, 2368, p. 66, 1915 March 18.

³T. Hecksher, Insights through dimensions, Nature Physics, **13**, 2017.



有关量纲分析的介绍已经完成，很高兴有机会与同学们一起讨论科学