量子引力，随机矩阵与玛丽安·米尔札哈尼的递推公式

孔令欣
清华大学丘成桐数学科学中心

丘成桐女子中学生数学竞赛
S.-T. Yau High School Girls' Mathematics Contest

清華大學 丘成桐数学科学中心
Yau Mathematical Sciences Center, Tsinghua University

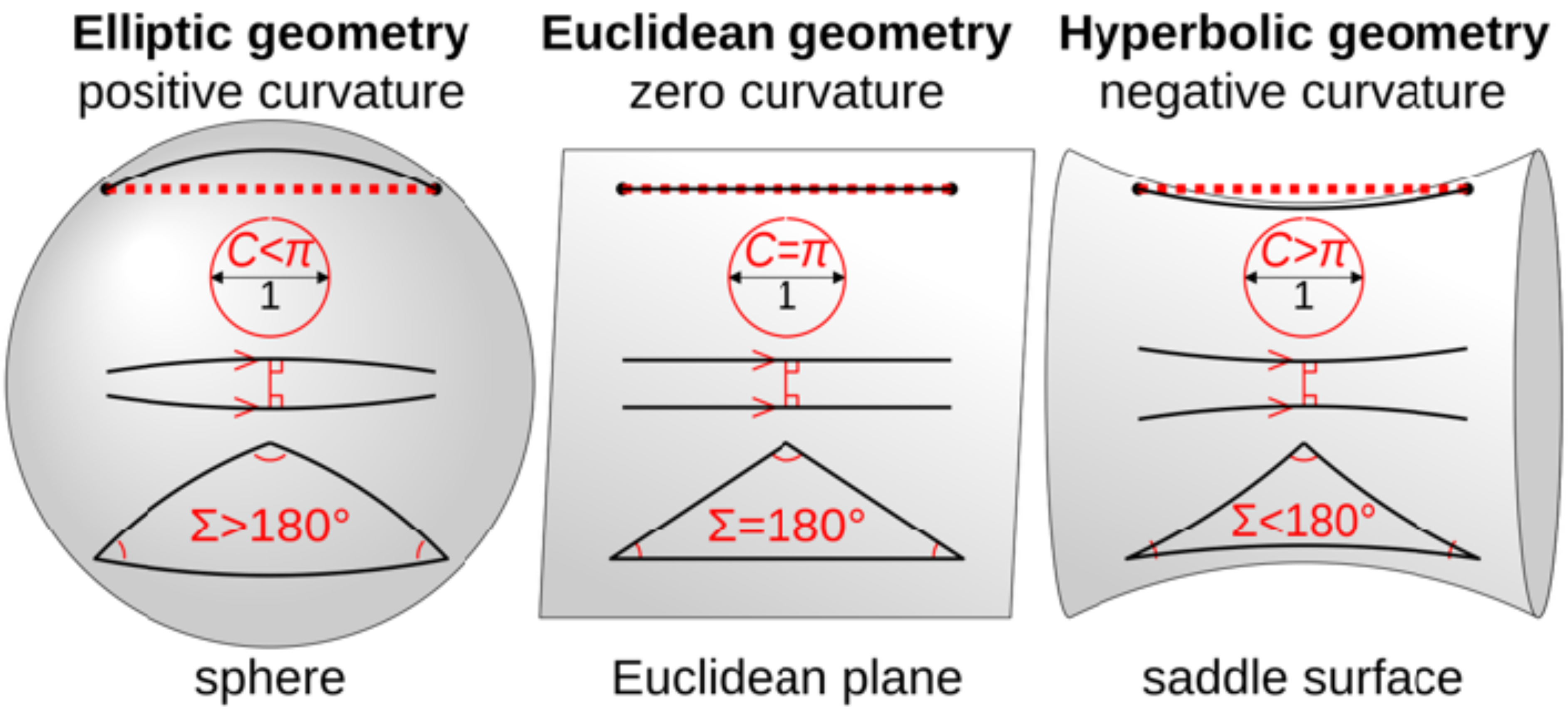
玛丽安·米尔札哈尼

- 玛丽安为伊朗数学家，生于伊朗德黑兰，数学家，女，专长于几何学，研究领域包括泰希米勒理论（英语：Teichmüller theory）、双曲几何、遍历理论及辛几何。自2008年9月1日起成为斯坦福大学的数学教授。

- 米尔札哈尼为2014年菲尔兹奖得主之一，也是获得这个数学奖项的首位女性及首位伊朗人。米尔札哈尼因为在曲面对称性研究的贡献而得奖。

- 2017年7月15日，玛丽安·米尔札哈尼因病去世。

双曲几何



courtesy https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_space

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1$$

正曲率

负曲率

双曲黎曼曲面

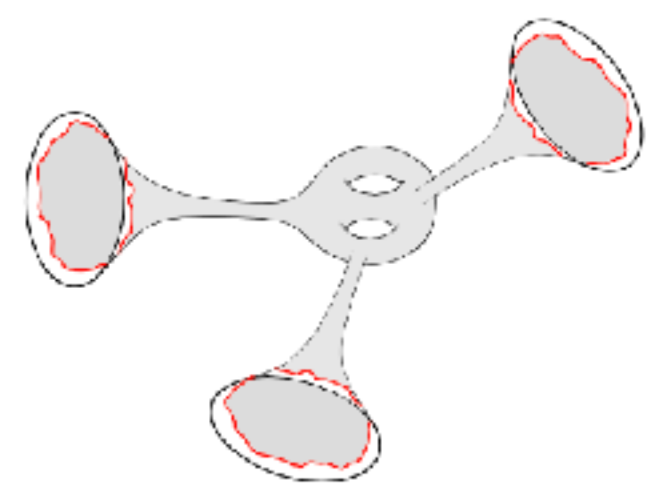
- 二维的（黎曼）曲面有不同的拓扑。一个重要的概念是曲面的亏格， 大概就是它的“孔”的数量。 比如说，一个球体的亏格为0，而一个圆环的亏格为1。

- 负曲率的面，也可以构成有多边界以及不同的拓扑的曲面

- 相同拓扑而几何不同的曲面有很多。这些曲面可以用一些参数 （模/moduli)来描述。

- 可能的参数就构成一个参数空间或者说模空间。

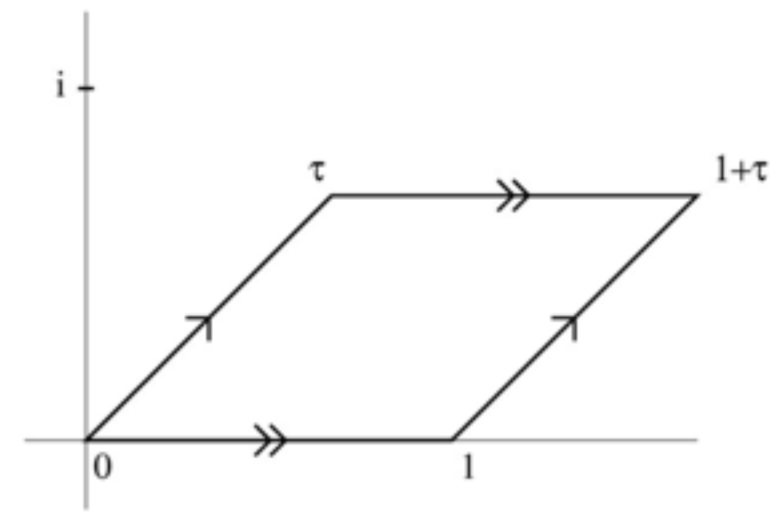
courtesy https://zh.wikipedia.org/wiki/

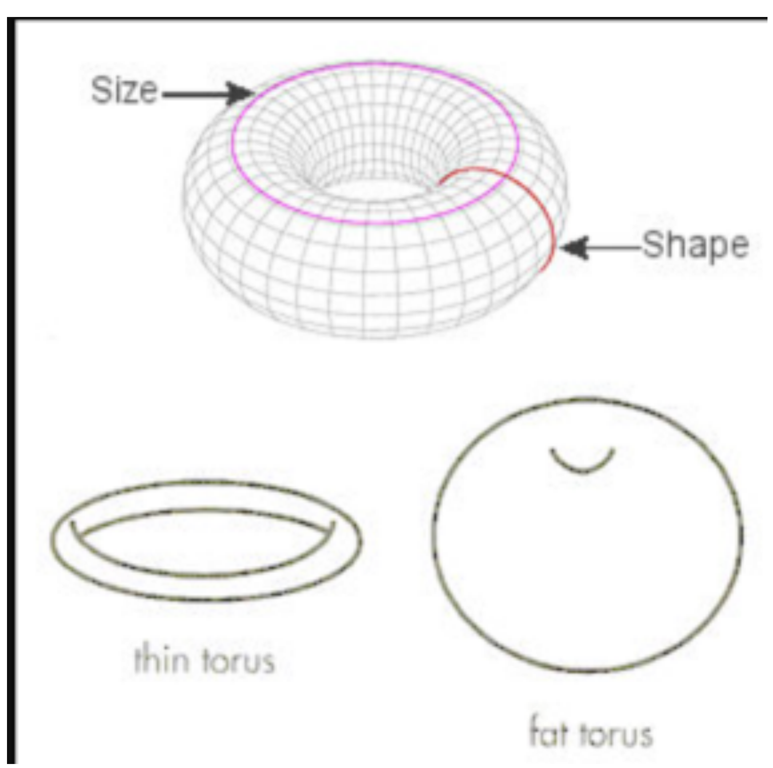


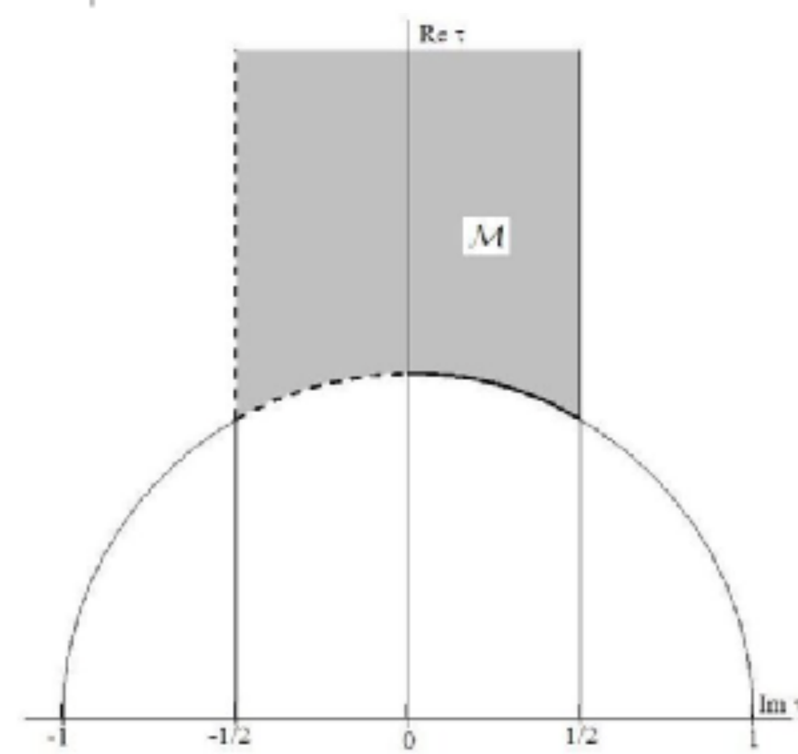
courtesy arXiv:1903.11115

模空间的一个简单例子 – 甜甜圈的模空间

- 不同形状的甜甜圈可以用复参数τ来描述。

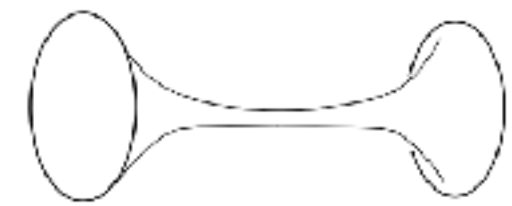






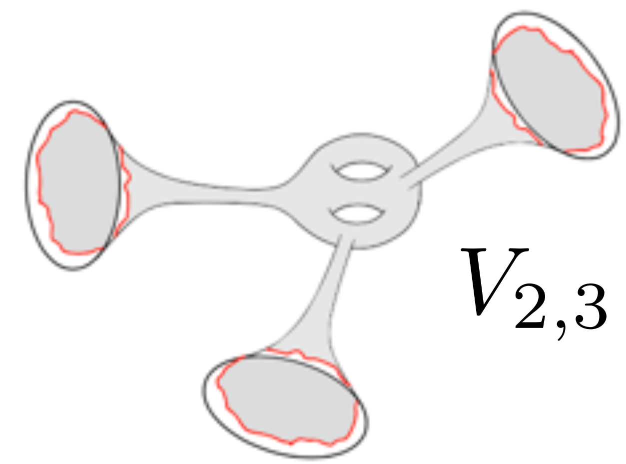
米尔札哈尼递推公式

- 记亏格为g， 并且有n 个
  边界的双曲面模空间可以给出度规。



$V_{0,2}$

- 一个度量叫Weil-Peterson form。这个度量下
  可以计算模空间的体积 $V_{g,n}$ 。



$V_{2,3}$

courtesy arXiv:1903.11115

- $V_{g,n}$ 的拉普拉斯变换

$$W_{g,n}(z_1,\ldots,z_n)=\int_0^\infty b_1 db_1 e^{-b_1 z_1}\ldots\int_0^\infty b_n db_n e^{-b_n z_n}\; V_{g,n}(b_1,\ldots,b_n).$$

- 它们适应一递推公式: （$y=\frac{\sin(2\pi z)}{4\pi}$ ，I,I′ are subsets of the arguments z2,...,zn and |I| is the number of elements in subset I.）

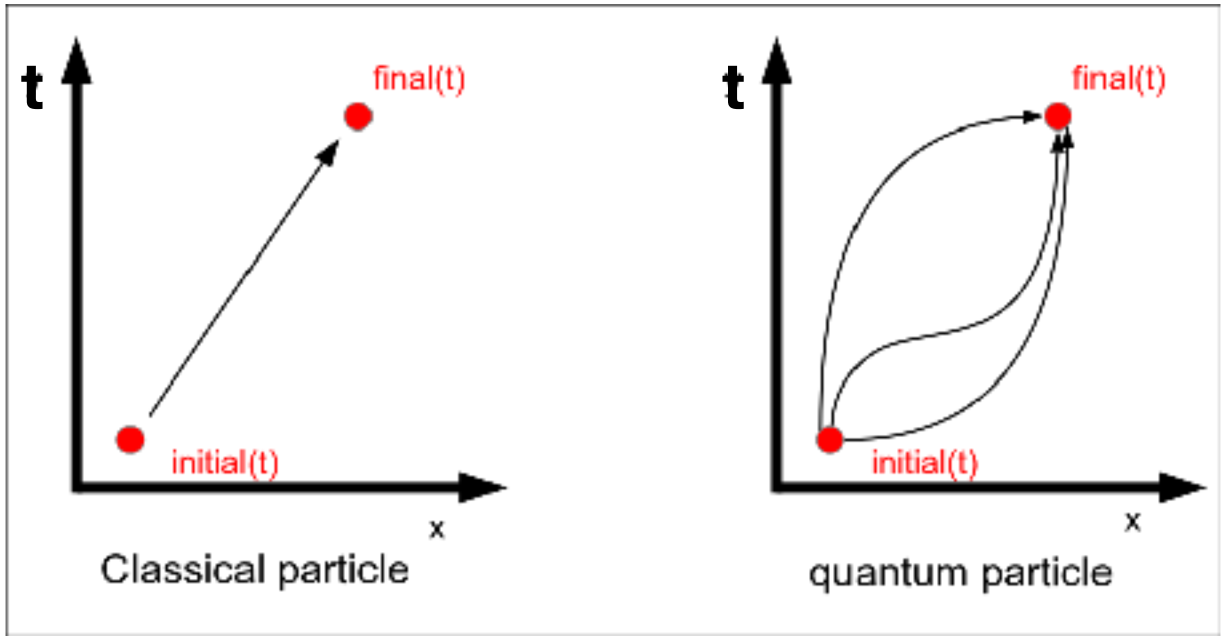
$$W_{g,n}(z_1,\overbrace{z_2,\ldots,z_n}^{J})=\operatorname*{Res}_{z\to 0}\left\{\frac{1}{(z_1^2-z^2)}\frac{1}{4y(z)}\left[W_{g-1,n+1}(z,-z,J)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{I\cup I'=J;h+h'=g}^{\prime} W_{h,1+|I|}(z,I)\,W_{h',1+|I'|}(-z,I')\right]\right\}.$$

量子力学

- 学过牛顿力学的同学们，我们知道粒子的运动可以通过牛顿第二定律算出来。$m\vec{a} = \vec{F}$。这个公式哪里来的呢？

- 找出经典的轨迹有点像计算光的轨迹—费马原理。 光线传播的路径的近似是光程最短的路径s。

- 按照牛顿力学运动的粒子，这个轨迹选择最小化S 。（只是这个S 不是光程。）



- S[x(t)] 是“作用量”，它是一个“泛函” 。意思是给定一个函数x(t) 描述从a 到b 的路径， S[x(t)] 会算出来一个数。学过牛顿力学的同学们，描述一个牛顿力学中自由粒子的作用量是

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt \, \frac{1}{2}\dot{x}^2$$

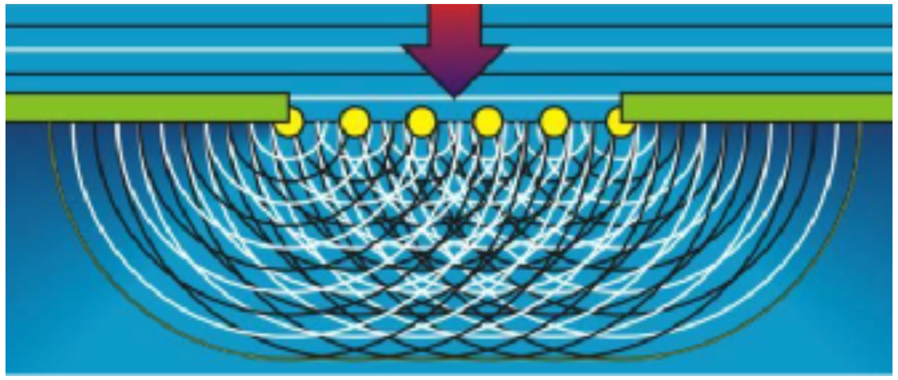
量子力学

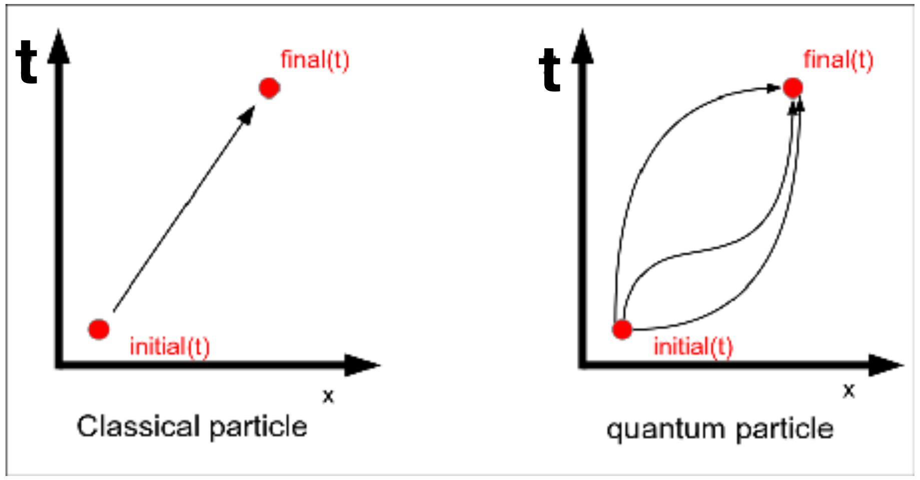
- 量子力学粒子是否从a 点跑到b点可以给出一个概率。这个概率是从一个所谓``概率幅”决定的。这个概率幅的计算方法，是这样的：

$$\int_a^b Dx(t)\, e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]}$$

- Dx(t) 意思是把所有路径的贡献全部加起来。

- 量子力学告诉我们除了经典路径所有其他路径都有影响的，甚至可以互相干涉 – 情形有点像水波一样。





$$\int_a^b Dx(t)\, e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]}$$

还原经典的力学，牛顿第二定律给出的路径正好让S 最小化！普朗克常数趋于0时，只有这一条路径对这个路径积分有贡献。离开这个经典极限，其他路径也会有贡献，需要把他们全部加起来 – 这就是量子力学的路径积分

量子引力？

- 引力理论的作用量 Einstein -Hilbert Action ，描述时空在物质的影响下几何的变化。 $S = \int \left[\frac{1}{2\kappa}(R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_{\mathrm{M}} \right] \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x$

- 爱因斯坦方程 $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}.$ 可以通过把作用量最小化求取。g 是度规，告诉我们空间的几何。通过爱因斯坦方程求解，我们就知道在物质的作用下时空如何弯曲和演化。

- 与粒子的量子力学相对比，量子引力一个构造方法就是定义度规的路径积分 – 给定边界条件，把所有可以接连这些边界的几何“全部加起来” – 在我们的四维时空世界，我们目前不知道怎样可以把几何“全部加起来”。。。因此量子引力的完整路径积分目前为止是一个基础理论物理最重要的前沿研究课题。

2维量子引力 - Jakiw-Teitelboim 引力理论

- 物理学家先在低维尝试一下，看看能不能得到一些有用的经验推广到高维去。

- 2维时空间是一个相对最简单的情形。时空是二维的黎曼面。与此同时，最近几年，大家对一个很特殊的二维引力作用量叫Jakiw-Teitelboim 理论感兴趣：

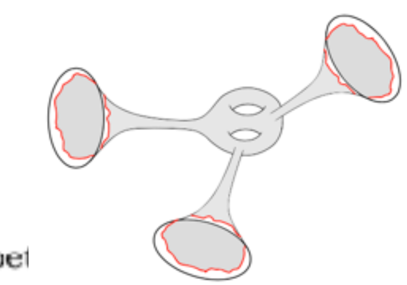
$$I_{JT} = -\frac{S_0}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}}\sqrt{g}R + \int_{\partial\mathcal{M}}\sqrt{h}K\right] - \left[\frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}}\sqrt{g}\phi(R+2) + \int_{\partial\mathcal{M}}\sqrt{h}\phi(K-1)\right].$$

- 在此理论中的“爱因斯坦方程” 的解都是双曲黎曼面！

2维量子引力 -
Jakiw-Teitelboim 引力理论

- 给定边界条件（n 个边界），
  JT 引力理论的路径积分，可以写成
  $$\sum_{g=0}^{\infty} \frac{Z_{g,n}(\beta_1, ..., \beta_n)}{(e^{S_0})^{2g+n-2}}$$

$$Z_{g=2,n=3}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \;=$$



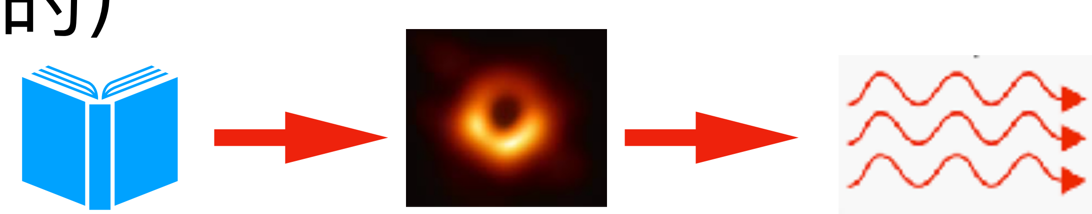
- $$Z_{g,n}(\beta_1, ..., \beta_n) = \alpha^n \int_0^\infty b_1 db ... \int_0^\infty b_n db_n V^{\alpha}_{g,n}(b_1, ..., b_n) Z^{\text{trumpet}}_{\text{Sch}}(\beta_1, b_1) ... Z^{\text{trumpet}}_{\text{Sch}}$$

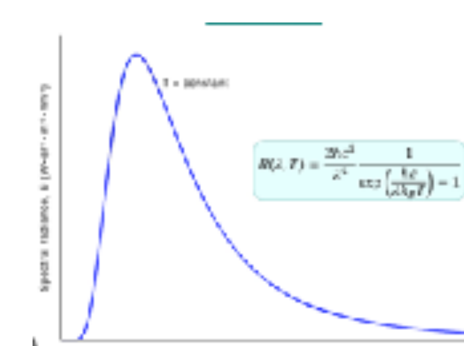
- 黄色部分正是米尔札哈尼所研究的模空间体积！

- 她的递推公式协助物理学家计算出JT 引力理论的路径积分。

算出来又怎么样？ – 引力与混沌

- 算出这样的路径积分，对我们理解引力有什么意义呢？
- 在引力的研究中，在很多半经典分析中（比如在黑洞附近分析物质的演化）发现黑洞会蒸发掉，放出热辐射。
- 信息（比如一本书）扔到黑洞里面，在黑洞蒸发的过程中，这本书的信息会混到热辐射里面，很难看出本来的书的内容 （霍金甚至认为信息彻底丢失 – 这就是有名的黑洞信息悖论 – 因为信息在量子演化过程中彻底丢失了是违反量子力学的基本假设的）





算出来又怎么样？ – 引力与混沌

- 在2维JT 引力我们可以讨论一个非常类似黑洞蒸发的问题，通过做路径积分，证明信息没有丢失。
  Penington, JHEP 09 (2020) 002; Almheiri, Engelhardt, Marold, Maxfield JHEP 12 (2019) 063

- 虽然信息没有丢失，可是量子引力的演化把信息打乱了。这与（量子）混沌现象非常相似。

•混沌现象的一个非常有名的例子就是三体问题

•量子力学中也有混沌现象的推广。
粗略地说，在量子力学的演化（这个路径积分）
也可以写成 e^{iHt} , 其中H 就是著名的哈密顿量，是一个厄米矩阵。一个量子混沌系统的H 有很多物理性质可以利用一个随机抽样的随机矩阵模拟出来。

•如果引力理论跟量子混沌系统有关系，那么我们之前讨论的路径积分（对双曲黎曼曲面的求和） 是否能跟随机矩阵拉上关系呢？

引力与混沌 – 随机矩阵

e.g.
2x2 Hermitian matrix $\begin{bmatrix} 3 & 3+i \\ 3-i & 2 \end{bmatrix}$

- 对于Lx L 厄米矩阵H，我们可以定义一个函数R （resolvent）

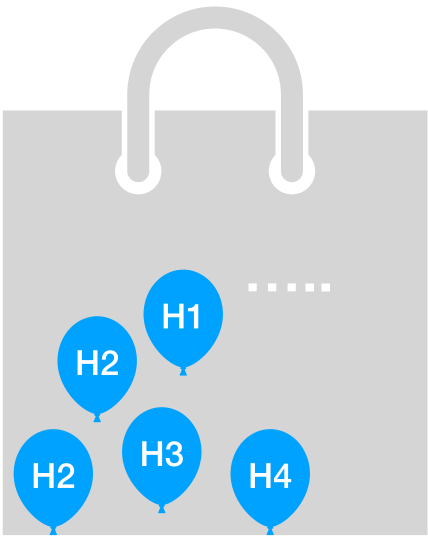
$$R(E) = \mathrm{Tr}\,\frac{1}{E-H} = \sum_{j=1}^{L} \frac{1}{E-\lambda_j}.$$

这里的λ_i 是这个LxL 厄米（Hermitian）矩阵H的特征值。有L 个。

- H 是一个随机抽样的Lx L 厄米矩阵，我们可以考虑这样一个平均值，在L 很大的时候能被展开：

$$\langle R(E_1)...R(E_n)\rangle_{\text{conn.}} \simeq \sum_{g=0}^{\infty} \frac{R_{g,n}(E_1,...,E_n)}{L^{2g+n-2}}.$$

期望/平均值：



- 神奇的事情发生了：设 $W_{g,n}(z_1,...,z_n) = (-1)^n 2^n z_1...z_n\, R_{g,n}(-z_1^2,...,-z_n^2)$

- 这个东西刚好符合前面提到米尔札哈尼的递推公式 B. Eynard and N. Orantin ！
因此JT 引力理论的路径积分，可以写成随机矩阵的Resolvent 的求和。至少在低维，引力与混沌系统得到非常具体的联系，印证了一直以来高维引力研究的一些直觉！ **arXiv:1903.11115**

期望值:

$$\langle x \rangle = \sum_i p(x_i) x_i$$

e.g. 扔硬币， 出现 

或 

的概率各一半 。

x=+1 **x=-1**

x 的期望值 = 1/2 . 1 + 1/2（-1） = 0. **意思是出现字/花的次数在扔了很多次之后趋于相同。**

结语：

- 构造高维量子引力仍然是一个未解的谜团
- 数学与物理有着深刻的联系
- 不同的数学分支，看似毫无关系的方向，往往会出现奇迹一般的关联 — 双曲面与随机矩阵的故事是这些联系的冰山一角
- 希望同学们继续参与这个神奇的探索过程
- 并向米尔札哈尼教授致敬！

谢谢