# 几何学一代宗师陈省身

丘成桐

本文翻译自丘成桐教授 2020 年 3 月 13 日于哈佛大学讲稿 Shiing-Shen Chern as A Great Geometer of 20th Century。2020 年 5 月 3 日刊登于《数理人文》杂志（订阅号：math_hmat），译者：夏木青，香港专业数学科普译者。未经许可，不得转载。

## 序（(2020 年 4 月 30 日)）

余少习筹学，于今五十七年。幼受先君教诲，于中国学者暨古希腊哲人之说，皆有涉猎。然而局促香江一隅，所闻浅陋，未得学问精髓也。

一九六九年余方弱冠，蒙师长提携，远渡重洋，受业于柏城陈先生，始知学海无涯，乐何如之，河伯见北海而兴叹，仲尼闻韶乐而忘味，于我心有戚戚焉。余窃不自揆，五十年努力，师友切磋，略有小成，庶几无愧当初立雪之素愿。

从心之年，重读先生遗作，感慨系之。高山仰止，景行行止。余毕业既久，二十载而后，始知当年先生创业之恢宏气概，不愧为廿世纪中国最伟大之科学家。方其巴黎访卡当，普城探威尔，拓魏尔之规范场理论，创纤维丛之陈示性类，几何得其大观，现代物理奠其根基矣。七十年代高能物理之标准理论，实源自诸物理学大师对规范场理论量子化之重整，吾师居功至伟。至于陈-西蒙斯理论，延续陈类，已成现代凝聚态物理不可或缺之工具矣。

吾师生前，固知其学必传，其名必显，功垂万世，故嘱余秉春秋之笔，正本源、辟异说，剖析其一生于筹学之贡献。

先师仙逝十六年，成桐始敢动笔，诚惶诚恐，草成此文，谨以此告慰先生在天之灵。

## 1. 绪言

牛顿曾说：

> 我能够比前人看得更远，皆因我站在巨人的肩膀上。

陈省身先生是二十世纪几何学的巨人，后世几何学者站在他肩膀上的多不胜数。另一方面，他也站在几位前辈的肩膀上。据先生自己的回忆，对他影响至深者有布拉施克（W. Blaschke）、凯勒（E. Kähler）、卡当（É. Cartan）、威尔（A. Weil）。前三位教导他投影几何、积分几何、凯勒几何、卡当-凯勒系统、连络理论、舒伯特算法。威尔是他友人，建议他寻找高斯-博内定理的内蕴证明，以及研究示性类。

让我们先看看十九世纪有那些数学巨人，他们的思想启发了陈先生和其他二十世纪的大几何学家。

微分不变量的研究可以追溯到黎曼（B. Riemann,）、克里斯托弗尔（E.B. Christoffel）、里奇（G. Ricci-Curbastro）、利维-奇维塔（T. Levi-Civita）和魏尔（Hermann Weyl）。卡当-凯勒理论对陈先生差不多所有工作都有直接的影响，著名的例子包括高斯-博内公式、陈形式的建构、陈-博特型式、陈-摩瑟不变量、陈-西蒙斯不变量等。积分几何、线复体和格拉斯曼几何在陈类的建构中也发挥了重要的作用。陈类的引进，是为了了解向量丛分类空间的上同调。追源溯始，是以必须先回顾陈先生之前大师们的工作。

## 2. 十九世纪几何三大方向

十九世纪的几何学有三大方向：

A. 黎曼的内蕴几何学，

B. 线性子空间族的几何，

C. 几何中的对称。

**A. 黎曼的内蕴几何学.** 牛顿为了研究力学发明了微积分，尤拉（L. Euler）随即把微积分应用于几何。尤拉仅仅考虑欧几里德空间里的曲面。他的看法和牛顿相似，认为整个宇宙是静止不动的，能够依靠一个单一的、整体的笛卡儿坐标系统来描述。这种看法给黎曼彻底颠覆了。他的老师高斯有关曲率是内蕴的发现，深深地影响着黎曼的宇宙观。黎曼工作的目标有三，即

- 建构和坐标系统选取无关的空间，
- 利用这内蕴空间的尺度和拓扑来探讨物理学的基础，
- 结合几何和拓扑以获取空间的整体讯息。

黎曼的目光远大，期望透过几何来认识物理世界。他的宏图立足于等价原理，即基本的物理学定律和几何定理必须和坐标系统的选取（即观测者）

无关。无论用笛卡儿坐标或极坐标进行计算，对象的种种几何属性皆不会改变。

六十年后，在爱因斯坦创造的广义相对论中，同样的等价原理也用上了。黎曼伟大的工作包含在题为《几何学的基本假设》1854 年的论文之中。几何必须遵守等价原理这一强烈的信念，驱使黎曼考虑在坐标变换下，两个微分二次形等价的条件。黎曼因此引进了曲率张量，这结果发表在一篇竞逐奖项的文章之中。当时巴黎学院悬赏求解有关热分布的问题，但终究没有人获奖，黎曼也不例外。论文是在 1861 年 7 月 1 日投寄的。在文首他引用了一句拉丁文的格言：此等原理拓展上引之路。他在文中找到了曲率张量，并指出这是两个微分二次形等价的必要条件。无论张量抑或内蕴的曲率都是全新的概念。黎曼打算循此途径再往前走，奈何他身染顽疾，健康日差。

1867 年，韦伯（Martin Weber）利用狄德金（Richard Dedekind）一篇未曾发表的文稿，比较详细地说明了黎曼的想法。从 1869 到 1870 年期间，克里斯托弗尔和利普希茨（Rudolf Lipschitz）对曲率张量进一步探索，并且给出两个微分二次形等价性的充分条件。1901 年，利维-奇维塔和里奇在《绝对微分法及其应用》一文中发表了张量的理论，写下了里奇曲率张量的公式。

1902 年，贝安奇（L. Bianchi）找到了里奇张量的守恆律，他发现只要把里奇张量减去了 $R/2$ 倍的尺度张量，它便满足一条守恆律。这个稍稍改变的张量于 1915 年十一月由希尔伯特和爱因斯坦在研究广义相对论时重新发现。广义相对论公认是人类认识空间与时间的里程碑，几何学家在其中的贡献，断断不容忽视。

另一方面，黎曼在复分析中引入黎曼曲面，把拓扑学带进复分析之中。他看出分析学跟黎曼曲面的整体拓扑有着深刻的联系。例如，黎曼-罗赫公式便指出，既定极点的半纯函数所组成的空间，其维数跟某些曲面上的拓扑性质有关。黎曼还着手研究物体的「把手分解」，可说是庞卡莱（H. Poincaré）有关流形上拓扑和整体分析工作的前导。

在研究的过程中，黎曼曾这样说：

> 我们小心翼翼地把拓扑性质和尺度性质分办开来。对同样的拓扑结构，可以容许有不同的观测系统，我们选定了其中最简单的。在这系统中，空间的所有尺度关系皆可完全决定，而所有有关尺度的定理也可由此推导出来。

黎曼为极小水平的几何和极大水平的几何所困扰，对前者的测量会愈来愈不准确，但后者却不然。

> 当我们把在空间的构造无限扩充，我们便要面对无穷远和无限大，前者和拓扑有关，后者则由尺度决定。

黎曼在现代几何学萌芽时的探索，让我们知道尺度和拓扑相互关系的重要性。二十世纪现代几何的发展，正正以此为主线。

**B. 线性子空间族的几何.** 1865 年，普洛格尔（J. Plücker）开始研究线几何。线几何的对象是三维投影空间中所有投影直线成组成的空间。他引入了以他命名的坐标。不久之后，格拉斯曼（H. Grassmann）更进一步，研究在向量空间中所有既定维数子空间所组成的空间，把普洛格尔的工作推广了。后人称这些空间为格拉斯曼流形。对流形上的纤维丛来说，格拉斯曼流形是万有空间。格拉斯曼流形的整体拓扑在微分拓扑学中十分重要。

1879 年，舒伯特（H. Schubert）对格拉斯曼空间引进了一种胞腔的结构，用以给出由线性空间组成的格拉斯曼流形的基本同调结构。这些结构的相交给出同调上的乘积结构。外向代数这一重要概念，是格拉斯曼 1844 年引进的。然而，外向代数并没有引起人们的关注，直至庞卡莱和卡当引入微分形式及其上的外微分运算法。

1928 年，卡当指出微分形式应当和流形的拓扑有关，他猜测由微分形式定义的上同调，透过在奇异链上对微分形式积分，同构于流形的奇异上同调。1931 年，他的学生德拉姆（G. de Rham）在学位论文中证明了这猜想。在三十年代，霍奇（W.V.D. Hodge）找到了在形式上的星运算，并且用它来定义德拉姆理论中的对偶。霍奇又用星运算把魏尔关于黎曼曲面的结果推广到高维流形上去。他又发现了代数流形中上同调 $(p,q)$ 分解，并且提出著名的猜想，即代数圆环唯一地表示流形的 $(p,p)$ 类。这可说是当前代数几何中最重要的悬而未决的问题。

**C. 几何中的对称.** 受到阿贝尔（N.H. Abel）和伽罗华（É Galois）有关群论、以及李（Sophus Lie）在切触变换的工作的影响，李、克莱因（Felix Klein）和基灵（W. Killing）发展了李群的理论。1872 年，克莱因提出了著名的爱尔兰根纲领，根据整体对称的连续群来刻划各类不同的几何，其中包括了投影几何、仿射几何和莫比乌斯几何。

投影几何是几何中最古老同时也是影响最为深远的一分枝。投影群很大，能把「无穷远点」变换到有限点上。投影几何研究的正是在这投影群下不变的属性，其中包括了线性子空间的属从关系，还有投影变换逞现的对偶性等等。这些概念最终形成了现代拓扑、几何、代数几何的基础。投影几何的重要人物包括：三世纪亚历山大的巴巴斯（Papas of Alexandria）、德萨格（G. Desargues）、帕斯卡（B. Pascal）、热尔贡（J.D. Gergonne）、庞塞莱特（J.V. Poncelet）、莫比乌斯（A.F. Möbius）、施泰纳（J. Steiner）。

投影几何循着两个不同的方向发展。一个是由阿贝尔、黎曼、诺特（M. Noether）等人发展出来、有关代数曲线的理论，它的内容很很丰富，古典投影几何和不变量理论大量地应用于其中。意大利的代数几何学者包括法诺（G. Fano）、恩里克斯（F. Enriques）、塞格雷（B. Segre）、塞韦里（F. Severi）等，他们把代数曲线的理论推广到代数曲面和某些特殊的高维代数簇上去。另一个方向，投影微分几何学糅合了两种不同的观点，一是黎曼几何中寻找局部不变量，另一是爱尔兰根纲领中利用对称群来刻划几何，其中著名学者包括：维尔琴斯基（E.J. Wilczynski）、切赫（E. Čech）、布拉施克。二十世纪初，不少日本和中国几何学者从事投影微分几何的研究，如苏步青和陈先生等便是。

莫比乌斯几何又名共形几何，它研究的是在共形群下不变的性质，是李球面几何的特殊情况。二维的共形几何内容丰富，导至共形群离散子群和高维共形平坦流形的研究。柳维尔（J. Liouville）和庞卡莱研究了尺度共形变换的方程，使新的尺度具有常数的纯量曲率。魏尔从曲率张量中分离出和共形变换密切相关的部分，后人称之为魏尔张量。四维流形中的魏尔张量又可进一步分解成自对偶和反自对偶两部分。

仿射几何研究的是线性空间内超曲面在仿射映照下的微分不变量。富比尼（G. Fubini）、布拉施克、卡拉比（E. Calabi）都曾研究过这门学问。仿射变换群的不变量在求解蒙日-安培方程中扮演了重要的角色。（凸）仿射球面的分类很重要，它引出不同类型的椭圆蒙日-安培方程。相关的还有所谓仿射极小曲面的概念，陈先生提出了一个相关的伯恩斯坦问题，问题由汪徐家和特鲁丁格（N.S. Trudinger）于 2005 年解决了。

## 3. 三江汇注的现代几何

魏尔和威尔同是二十世纪数学上的巨人。威尔曾说：几何直觉从心理学的角度看，可能永远也弄不清楚。...... 但我们确确切切地知道的，是这世纪的数学如果没有卡当、霍普夫（Heinz Hopf）、陈省身等人的努力，将不会有如斯长足的进步。可以放心地断言，数学要一如既往地前展，这样的大师必不可少。

除了上述三位几何大师，我们也应该一提利维-奇维塔、魏尔、威尔、惠特尼（H. Whitney）、摩尔斯（M. Morse）、霍奇等人的重要贡献。利维-奇维塔首次把平行移动引入黎曼几何之中。平行移动的重要性是不言而喻的，透过它我们可以把在流形不同点上的资讯，沿着连接这两点的路径上传送。资讯因所选路径的不同而发生变化，恰恰和规范变换相似。一、二年间，魏尔提出他的规范场论，用以了解加上了电磁学的重力理论。理论中的规范群是所有正数形成的乘法群，而且他也用上了尺度的共形变换。在这个早期的理论中，由于平行移动不能保持长度，爱因斯坦并没有接受它。

1928 年，看到福克（V. Fock）和伦敦（F. London）在量子力学的工作后，魏尔终于知道正确的规范群是由单位复数所组成的群。他指出规范原理之于物质的定律，犹如等价原理之于重力的定律。在广义相对论中，最自然最简单的作用原理是希尔伯特作用量，即纯量曲率的积分。在规范原理中的对应者是魏尔作用量，即曲率张量平方的积分。

上世纪初期，卡当把李群和微分系统的不变量理论结合，发展了广义空间的概念，这些空间包括了克莱因的齐次空间和黎曼的局部几何。用现代的数学语言描述，他引进了主纤维丛和在纤维丛上的连络，这便是所谓非可换的规范场论，是利维-奇维塔平行理论的推广。一般而言，给出一个纤维丛 $\pi\colon E \to M$，其纤维 $\pi^{-1}(x), x \in M$，为一齐次空间，上面有一李群 $G$ 在作用。一个连络乃指在纤维间的和群 $G$ 作用相容的无穷小移动。

格拉斯曼引进了外形式，而卡当和庞卡莱则引进了外微分运算。卡当利用普法夫系统和延伸理论找到一些不变量，用以解决几何中的等价问题。他寻找不变量时依赖移动标架，对陈先生有很大的影响。

霍普夫和庞卡莱证明了在流形上向量场指数的总和能够用来计算流形的尤拉数，这个结果开启了微分拓扑的大门。霍普夫于 1925 年的学位论文中，证明在超曲面上的高斯-博内公式。1932 年，他强调对某些黎曼曲率项组成

的多项式进行积分的重要性。1935 年，霍普夫的学生斯蒂芬（E. Stiefel）把上述的工作由单个向量场推广至有限个向量场，然后在切丛上定义了斯蒂芬-惠特尼类。差不多同时，惠特尼对一般的球面丛定义了相同的示性类。

霍普夫的工作深深地影响了陈先生。先生说：黎曼几何学及其在微分几何的推广，本质上都是局部的。我们需要把邻近的小块编织起来，以形成一个整体的空间，看来有点儿别扭，这便是靠拓扑学完成的。卡当和陈先生都看到了纤维丛在微分几何的重要性。1934 年，卡当一位名叫埃雷斯曼（C. Ehresmann）的学生写了一篇有关复格拉斯曼流形的胞腔结构的论文，证明了它的上同调不含挠量。这份论文对陈先生其后关于陈类的工作有颇大的影响。埃雷斯曼更进一步把源自卡当的连络概念现代化。

## 4. 战火中的探索

先生 1911 年 10 月 28 日生于嘉兴，2004 年 12 月 3 日在天津去世。他幼年在家读书，接着上了四年中学，十五岁进入南开大学，及后在清华大学四年（1930-1934）。大学期间，他研读了柯立兹（Coolidge）的非欧几何学《圆和球面的几何》、萨门（Salmon）的《圆锥切面和三维解析几何》、卡斯德尔诺沃（Castelnuovo）的《解析和投影几何》和奥托斯坦迪（Otto Stande）的《线构造法》等书。他的老师孙光远研究投影微何几何，走的是维尔琴斯基、富比尼、切赫的路子。他的硕士论文是有关投影线几何的，研究的对像是在三维线空间中的超曲面。他考虑了线的全等、线生成的二维子流形和二次线复体的振动，最终完成了四篇论文。

1932 年，布拉施克访问北京，并以「微分几何中的拓扑问题」为题讲学，内容涉及微分同胚的拟群及其局部不变量。陈先生由是对整体的微分几何学略有所闻，并意识到代数拓扑的重要性。他开始阅读韦布伦（O. Veblen）的《相位学》一书。

当时清华大学数学系的系主任是郑之蕃，后来他成了陈先生的岳父。在他的帮忙下，1934 年陈先生得到奖学金，往汉堡跟随布拉施克去了。他的博士论文在布拉施克的指导下完成，那是有关蹼几何（web geometry）的。当时阿丁（E. Artin）、赫克（E. Hecke）、凯勒都在汉堡。布拉施克正在研究蹼几何和积分几何。陈先生研读了塞弗特-瑟雷弗尔（Seifert-Threlfall，1934）和亚历山大卓罗夫-霍普夫（Alexandroff-Hopf，1935）的著作，又开始研究积分几何。这门学问始自克罗夫顿（M. Crofton），他透过一根针和一平面曲

线相交的测度，给出了曲线长度的公式。这个领域的另一开拓者是雷登（J. Radon），他引进了以他命名的变换，即利用移动平面的截面来决定物体的形状，这变换现在广泛地用于医疗造像之中。陈先生十分喜爱积分几何学，也许是由于创派的雷登 1919-1922 在新建的汉堡大学当教授，由是影响了布拉施克和他的弟子。陈先生和圣塔洛（L. Santaló）都是布拉施克差不多同时期的学生。圣塔洛是继布拉施克后积分几何的旗手。从 1939 年开始，陈先生以积分几何为主题写了好几篇文章。

当时凯勒在汉堡以微分系统理论为题讲授卡当-凯勒理论。1933 年，他发表了有关凯勒几何的第一篇论文。在这篇出色的文章中，他引进了不少重要的概念。他算出凯勒尺度的里奇张量是体积形式取对数后的复赫斯算子。他观察到凯勒-爱因斯坦尺度必须满足一条复的蒙日-安培方程，并举出不少例子。他也证明了凯勒几何中的里奇形式是封闭的。而且，作为德拉姆同调类的一员，它和凯勒尺度的选取无关。这便是凯勒流形上的第一陈类。陈先生当时正在上凯勒的课，他受到这论文的影响是不言而喻的。在他生命的最后三十年中，陈先生常对学生说，他非常希望教懂他们卡当的移动标架法，它的威力非常强大。很可能他是从凯勒那里学懂卡当-凯勒的，那是 1934 年在汉堡凯勒的班上，能坚持到最后一课的，只有陈先生一人而已。

陈先生毕业后，拿到了一份博士后奖学金，让他可以留在欧洲深造。布拉施克提议他或是留在汉堡跟随阿丁做研究，或是到巴黎去向卡当问学。他选择了后者。从 1936 至 37 年，陈先生到了巴黎，追随卡当研习移动标架法（用现代语言来说，主纤维丛）、等价问题和更深入的卡当-凯勒理论。他在巴黎逗留了十个月，每两星期和卡当见一次面。1937 年夏天，他就回中国去了。其后数年，他仔细地阅读卡当的文章。卡当一生的论文六千多页，他看了最少百分之七八十，其中有部分反复读了多遍。抗战期间，能把全副精力贯注在这些论文上，并且独立地思考，可说是不幸中之大幸。

陈省身如此回忆卡当对他的影响：

- 毫毫无疑问，卡当是当世最伟大的一位数学家，他天才横溢，但为人谦厚，一生平和。
- 1940 年，我刻苦攻读他的文章，终于领悟到连络的关键作用，并由此完成了几篇论文，讨论如何在几何结构上定义连络。

大数学家魏尔曾跟随希尔伯特学习，他这样评价卡当：卡当无疑是现存最伟大的微分几何学家，但我也不得不承认他的著作，跟他大部分论文一样，皆晦涩难明。1901 年前后，卡当首先把许多局部的几何问题，理解成普法夫问题的推广。简单而言，普法夫问题是如何去刻划给定切触 1-形式的拉格朗日子流形。卡当提出在流形上考虑非单一个 1-形式而是一组 1-形式，从而寻求条件决定流形的最大子流形，使得所有这些 1-形式在其上的拉回为零。他找到了一些充分条件，但要构造这个最大的子流形，却不得不引用柯西-柯瓦列夫斯基定理来求解一系列初值问题，是以他的理论只在实解析的范畴里成立。当时人们对这样的限制并不在意。

用现代的语言来说，卡当利用由这些 1-形式生成的微分理想所组成的代数来描述他的充分条件。这样的结果已涵盖了他心中差不多所有的应用。1933 年，凯勒发现卡当这套理论可以很自然地推广至由任意次数形式（不必是 1-形式）所生成的微分理想上去，卡当的「自反检测法」依然成立，这便是今天的卡当-凯勒定理了。

卡当-凯勒理论中的手法对陈先生的影响至钜。他在证明高斯-博内定理和建构示性类中显示的高超技巧，在我认识的几何学家中无人能及。非交换规范场的理论即在向量丛或主丛上的连络，它的历史也值得一提。二十世纪之初，卡当看到利维-奇维塔和舒顿的工作能够推广到许多具有几何结构流形上，使人们可以对各式各样的张量场进行「协变微分」。他发表了有关「拟群」的一系列著名论文。利用独创的等价方法，他找到一般的方案，用以计算曲率不变量和在今天称为主丛上的典型平行移动。

上世纪二十年代初期，卡当经已在论文中检视了在具有几何结构的流形上的内蕴「连络」，这些几何结构包括（拟）黎曼、共形、投影等，此外，还有些他称作「广义空间」的东西。在 1926 年出版有关黎曼几何的著作中，卡当讨论了张量场的协变微分。

陈先生 1946 年发表陈形式理论，当时他早已熟知在纤维丛上的酉连络。五十年代，埃雷斯曼和陈先生都曾以一般纤维丛上的连络为题写过绍介性的文章。1950 年陈先生在哈佛举行的世界数学家大会中发表主题演说，题目便是连络。在演说中，他用现代的语言，回顾了卡当和他在向量丛上连络和示性类的工作。事实上，陈先生在 1948 年底离开了中国，49 年初到达普林斯顿。他在高等研究所的韦布伦研讨班上给出一系列报告。报告的内容要到了1951 年先生搬到芝加哥后才成书面世，书名《微分几何学选讲》。

陈先生在书中讲述连络的理论。今天，物理学者把这套东西称作非交换规范场论，魏尔在 1928 年开拓了可换规范场的研究，规范原则的名字是他起的，藉以解释物质背后的基本定律。在他的名著《群论和量子力学》中，他观察到电磁学方程和相对性薛定谔方程在规范变换下不变。这里的规范群乃是圆群，伦敦早已指出魏尔 1918 年用的群和在量子力学中的波函数并不相容。魏尔说这个「规范不变原理」和他前次提出的差不多。他原先的想法，是希望利用这理论来统一引力和电力。他说：现在我相信规范不变性并非把电力和重力联系起来，联系的应是电力和物质。这个新的规范不变原理具有和广义相对论相似的特质，它里面包含着一个任意的函数，只有这样理论才行得通。魏尔又说：假如我们是对的话，那么电磁场乃是由物质波场而非重力场所导致。1918 年，他提出作用量是曲率平方的积分（当时他提出把尺度进行共形变换，其中的共形因子和规范群有关）。事实上，在规范场论中，最简单的规范不变纯量便是曲率平方的积分。

1954 年，杨振宁和米尔斯（R. Mills）用这套理论来说明在粒子物理学中的同位旋量。可是他们不晓得如何去量子化这理论，正如泡利（W. Pauli）指出，他们无法用这个理论来提供规范场的非零质量。泡利把魏尔的可换规范场论发展不可换。很明显，无论泡利、杨或米尔斯都不知道卡当和陈先生等人的工作。有趣的是，无论杨先在在芝加哥留学，或是在普林斯顿当博士后时，陈先生都在那里。杨父还教过陈先生呢。

## 5. 不变量的冠冕

我们现在较详细地说明先生在几何上的工作。工作大致可分为四时期：

第一时期由 1932 至 1943，清华大学、汉堡、巴黎、昆明，

第二时期由 1944 至 1946，普林斯顿、南京、普林斯顿，

第三时期由 1950 至 1960，芝加哥，

第四时期由 1960 至 2004，柏克莱和南开。

这些工作大部分和等价问题有关。等价问题可以追溯至黎曼。

问题 **1.** 判定两个尺度是否可以通过坐标变换互换。

1869 年，克里斯托弗尔和利普希茨解决了黎曼几何等价问题的一个特殊形式。为此，克里斯托弗尔引进了今天称作利维-奇维塔连给的协变微分法则。

卡当提出了更广泛的等价问题：

**问题 2.** 给出两组线性微分形式 $\theta^i$ 和 $\theta^{*j}$（各自的坐标为 $x^k$ 和 $x^{*l}$），每组的微分形式皆线性独立。给出一个 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的子 $G$，试找出下列函数

$$x^{*l} = x^{*l}(x^1, \ldots, x^n) \tag{1}$$

使在它的代换下，$\theta^{*j}$ 和 $\theta^i$ 只差 $G$ 中的一个元素。

问题的答案通常涉及局部不变量，卡当给出了生成这些不变量的方案。

在第一时期，陈先生沿着卡当的路子走下去，应用卡当-凯勒理论解决了几个和等价问题相关的问题。例如，在投影几何中，他聚焦于下列问题：

**问题 3.** 给出一个子流形，试确定其上所有关于投影群不变的局部不变量，并且透过和简单几何物体的密切性质来描述它们。

除此之外，先生也研究了蹼几何、投影线几何、在投影空间中子流形接触对的不变量、曲面的变换（和孤立子理论中的巴克伦（Bäcklund）变换有关）。投影微分几何另一个典型问题，乃是利用正规投影连络来研究路径的几何。李的弟子特雷斯（A. Tresse）考虑由

$$y'' = F(x, y, y') \tag{2}$$

的积分曲线定义的路径空间，研究了它在正规投影连络下的性价。陈先生把他的结果推广到 $n$ 维空间。给出 $2(n-1)$ 维满足一微分系统的曲线族，使通过每一点及一切方向，只有一条曲线。他定义了一个正规投影连络。其后他还把结果推广到子流形上去。

1939 年，陈先生完成了他人生中第一项主要工作，那是有关积分几何的。积分几何的开山祖师是克罗夫顿和布拉施克。陈先生看出来，这套理论最合理的提法应是同一李群的两个齐次空间，此时有两个子群 $H$ 和 $K$，

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ G/H & & G/K. \end{tikzcd}$$

两个陪集 $aH$ 和 $bK$ 称为相从，如果它们在 $G$ 中相交。在齐次空间 $G/H$ 上的几何量可以拉回 $G$ 上去，这个拉回的量经过某些 $G$ 的不变量的作用后，又向前推，成为 $G/K$ 上的几何量。这项工作比以杰尔芬德（I.M. Gelfand）

为首的苏联学派和向井茂（S. Mukai）的工作都要早。今天，这种变换有时称为傅里叶-向井变换。如此这般，陈先生把克罗夫顿找到的好几条重要公式都推广了。几年之后，也是在这个架构上，他把庞卡莱、圣塔洛、布拉施克的动力学公式也推广了。威尔指出，布拉施克的工作把积分几何的层次提高了，但陈的工作又一下子更上一层楼。陈先生的论文既深且广，闪烁着思想的光芒，教人难忘。

第二时期。1943 年，陈先生接受了韦布伦和魏尔的邀请到普林斯顿访问。当时正值二次大战，他乘坐的军机从昆明出发，途经印度、非洲、南美，最后抵达迈亚密，总共花了七天时间。那年八月，他坐火车到了普林斯顿。那时他家刚生了一个男孩，五年后父子才能再见面。

陈先生虽然敬佩魏尔，但却听从威尔的建议，研究卡当和惠特尼的纤维丛理论。威尔把 1937 年托德（J.A. Todd）和 1943 年艾格尔（M. Eger）的论文推介给陈先生。这两篇论文定义了代数几何中的「典型类」，和斯蒂芬-惠特尼类只能模 2 的情况不同。不过，这些工作依循意大利几何学派的精神，建基于一些没有证明的假设上。到了四十年代末，霍奇证明了托德和艾格尔的类等同于陈类。

陈先生多次告诉别人，他最出色的工作是高斯-博内公式的内蕴证明。所谓内蕴证明，意指证明不需要用到黎曼流形安放在欧氏空间这事实。这公式现在通称为陈-高斯-博内公式，它的背景可简述如下：

- 1827 年，高斯在《曲线曲面论》中对测地线三角形给出了公式。他考虑在三维空间里的曲面，证明用上了高斯映照。
- 1848 年，博内 (P.O. Bonnet) 把公式推廣到由一閉曲線圍成的單連通區域，見《一般曲面理論》。
- 1888 年，范戴克（W. von Dyck）把公式推广至具任何亏格的曲面上去，见《位相分析》。
- 霍普夫再把它推广到高维空间的超曲面。
- 1940 年，阿伦多弗（C.B. Allendoerfer）和芬切尔（W. Fenchel）研究了能嵌入欧氏空间中的闭定向黎曼流形。
- 1943 年，阿伦多弗和威尔把公式推广至闭的黎曼多面体，因而对一般的闭黎曼流形一也成立，见《黎曼多面体的高斯-博内定理》一文。

然而，阿伦多弗-威尔的证明依赖于流形能等距地嵌入欧氏空间的假设。这假设要在十五年后，才由纳什（J. Nash）证明。

威尔在陈先生的选集中如此评论：

- 我们依照魏尔和其他人的做法，在公式的证明中利用了管道。当时并不清晰的理解到管道的构造依赖球面丛，而球面丛依赖浸入的相交丛，因此不是内蕴的。
- 陈的证明第一次利用了单位长度的切纤维丛这内蕴的几何对像，整条公式一下子就清楚不过了。

陈先生的证明，可从下面二维的特例中窥见一二。首先，利用移动标架把曲面的结构方程表示为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega_1 &= \omega_{12} \wedge \omega_2 \\ \mathrm{d}\omega_2 &= \omega_1 \wedge \omega_{12} \\ \mathrm{d}\omega_{12} &= -K\omega_1 \wedge \omega_2 \end{aligned}$$

其中 $\omega_{12}$ 是连络形式，而 $K$ 是高斯曲率。连络形式这时变成曲率形式的超度，只在单位切丛上定义。它的高维推广是陈先生给出的，由连络和曲率等项乘积组合而成，颇为繁复。

给出一整体定义的向量场 $V$。在 $V$ 非零处，令

$$e_1 = \frac{V}{\|V\|}$$

并取 $e_1$ 与 $e_2$ 形成直交系。引用司托克斯公式，可知

$$-\int_M K\omega_1 \wedge \omega_2 = \sum_i \int_{\partial B(x_i)} \omega_{12} \tag{3}$$

其中是以 $B(x_i)$ 为中心的细小圆盘，而向量场 $V$ 在 $x_i$ 为零。式子中右手面的每一项皆可以利用向量场 $V$ 在 $x_i$ 点的指标来计算。根据霍普夫和庞卡莱的相关定理，向量场指标和等于曲面的尤拉数。就算是在简单的二维情况，陈先生的证明也是新的。在高维空间，利用的是单位长度切向量形成的纤维丛。

曲率形式 $\Omega_{ij}$ 是反对称的。普法夫形式是

$$\mathrm{Pf}=\sum\varepsilon_{i_1,\ldots,i_{2n}}\Omega_{i_1i_2}\wedge\cdots\wedge\Omega_{i_{2n-1}i_{2n}}.$$

一般的高斯-博内公式可以表达为

$$(-1)^n\frac{1}{2^{2n}\pi^n n!}\int_M \mathrm{Pf}=\chi_{\mathrm{top}}(M).$$

陈先生苦心孤诣的一步，是找到在单位球面丛上一个自然的形式 $\Pi$，使其微分 $\mathrm{d}\Pi$ 等于 Pf 的提升。这个美妙的构造名为超度，它在后来纤维丛的拓扑理论中佔着重要的地位。当应用到庞特利雅金形式时，便得到陈-西蒙斯形式，这已是陈先生和西蒙斯（J. Simons）二十多年后的工作了。

第二时期可说是先生数学事业的黄金时期，继内蕴证明后他又发现了陈（示性）类。陈类是向量丛的拓扑不变量。在陈省身选集的序言中，威尔说陈先生初到普林斯顿时，他俩对卡当的工作，以及凯勒在《微分方程系统理论导引》书中的精彩描述印象深刻。两人意识到纤维丛在几何中将会扮演重要的角色。

威尔似乎不知道陈先生也受到庞特利雅金（L. Pontryagin）1942 年和 1944 年两篇论文的影响。这两篇文章在陈先生的论文引言中都已提及。在第二篇论文中，庞特利雅金引进了由曲率定义的封闭形式，同时证明了由这个闭形式定义的德拉姆上同调和流形尺度的选取无关。庞氏仅仅在流形能同构嵌入欧氏空间时证明他的曲率形式是示性类。我想，陈先生当时刚刚给出了高斯-博内公式的内蕴证明，很自然地便希望完成庞氏的未竟之功。可是，实格拉斯曼流形的胞腔结构太复杂了不好计算，先生转而考虑复的情况，他成功了。

陈先生说，我对示性类的认识始于高斯-博内公式，那是曲面理论中人人皆知的结果。远早于 1943 年给出高维高斯-博内公式的内蕴证明前，我已经知道古典的高斯-博内公式可以由高斯的绝妙定理推导出来，那不过是把正交标架法用到曲面上的结果。这证明的代数内容，可说是以后称为超度的第一个例子。超度一如所料，成为纤维丛的同调论和其他问题的基本工具。

陈先生心中常惦记著卡当的标架丛和德拉姆定理。纤维丛的发展，我们扼要地概括一下。1936 年斯蒂芬和 1937 年惠特尼引入斯蒂芬-惠特尼类，它只是模 2 的。1939 年费尔德包（J. Feldbau）、1941、42、43 年埃雷斯曼、1944、

45 年陈、1944 年斯腾罗德（N. Steenrod）皆研究了纤维丛的拓扑。1942 年，庞特利雅金引进了庞特利雅金类，利用黎曼流形的曲率给出拓扑不变量。

在证明高斯-博内公式时，陈先生借助了一个向量场，藉着其零点来决定流形的尤拉数。假如我们把一个向量场换成在一般位置的 $k$ 个向量场，它们线性独立，形成 $k-1$ 维的圆环，这时圆环的同调类跟向量场的选取无关，这是斯蒂芬 1936 年的学位论文的内容。陈先生对复向量丛考虑相似的步骤，在高斯-博内中他利用曲率形式来表示尤拉数。很自然地，对其他陈类也可以利用 $k$ 个向量场的退化集。1937 年，惠特尼考虑比切丛更一般的球面丛上的截面，从障碍理论的角度研究它。他看到在格拉斯曼流形 $\mathrm{Gr}(q,N)$ 上的万有纤维丛的重要性。此处 $\mathrm{Gr}(q,N)$ 包含所有在 $N$ 维欧氏空间的 $q$ 维平面。他证明了任何一个在形流 $M$ 上其格等于 $q$ 的纤维丛，都可以由一个从 $M$ 到 $\mathrm{Gr}(q,N)$ 的映照 $f$ 诱导出来。当 $N$ 足够大时，庞持利雅金（Pontryagin，1942）和斯腾罗德（Steenrod，1944）观察到这个映照在同伦的意义下是唯一的。纤维丛的示性类等于

$$f^*\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{Gr}(q,N)) \subset \mathrm{H}^\bullet(M).$$

1936 年埃雷斯曼研究了上同调 $\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{Gr}(q,N))$，知道它们是由舒伯特胞腔生成的。

上世纪九十年代，陈先生回忆他的工作，说：那不过是个简单的观察，加上一点儿运气。1944 年，我看到对复向量丛来说，情况远比实的情况简单，因为绝大部分古典的复空间，如古典复的格拉斯曼流形、复斯蒂芬流形等，都没有挠量。陈先生用了三种不同的方法对复向量丛来定义陈类，即障碍理论、舒伯特胞腔和在丛上连络的曲率形式。他建立了三者的等价性。

虽然陈类比高斯-博内的影响要大得多，陈先生还是认为后者是他最好的工作。高斯-博内公式刻在南开大学他的墓碑上。我相信先生从高斯-博内公式那儿得到启发，从而创造了陈类。而且，从这个证明中，他认识到单位切向量构成的内蕴球面丛上的形式在几何的重要性。这个利用障碍理论的做法，平行于斯蒂芬把霍普夫的向量场推广到斯蒂芬-惠特尼类，其中把它们视为多个线性独立向量场存在的障碍。对曲率形式而言，利用它们来表示陈类明显地相类于高斯-博内公式。陈先生建立了对酉连络的陈类。威尔在布巴基研讨班上作报告时，他把结果重新整理，使它能应用到紧李群的连络上去。

根据先生的夫子自道，他知道对一般 $G$-连络上的公式。可是他不懂得证明上同调类是和连络的选取无关。这教人有点儿惊讶，威尔不过简单地把两个连络用一族连络连起来，然后微分其特徵形式，便得到对应的超度形式。类似的想法早在 1933 年便给凯勒用来证明由里奇曲率形式表达的第一陈类是和凯勒尺度无关的。庞特利雅金也曾把类似想法用于庞特利雅金类。

1945 年，陈先生受邀在美国数学会夏季会议上发表主题演说，他的报告见于次年的数学会会刊第五十二卷，题目为《整体微分几何学的一些新看法》。霍普夫在这论文的评论中指出，陈氏的工作为整体微分几何学开展闢了新的天地。1946 年 4 月，陈先生回国，在南京出任中央研究院数学研究所的副所长。在这时期，并加上他以清华大学教员身分在昆明西南联大教书的日子，他培养了不了对中国数学界颇有影响的学者，其中著者包括王宪锺、陈国才、吴文俊。虽然他们都不是陈先生的博士生，但他们都受曾受过先生的栽培。

当希斯布鲁克（F. Hirzebruch）着手撰写论文《移植某些代数曲面上的定理到二复数维的复流形》时，他留意到文中某些结果可以推广到高维，可是所谓对偶性公式尚未证明。这公式断言两个复的向量丛的直和的总陈类，等于这两个丛的总陈类之积。希斯布鲁克在校对论文时，附上一个注记：承陈和小平告知，对偶性公式于将出版的陈的论文《关于复球面丛和代数簇的示性类》中得到证明。到了晚年，希斯布鲁克回顾这段日子，说：在高等研究所的两年对我的数学生涯影响至钜，我研读陈类，并探究其基本性质，又引入陈格。其后陈格（Chern character）在我和阿蒂雅（M. Atiyah）的合作中，成为从 $K$-论到有理上同调的一个函子。

小平邦彦（K. Kodaira）和希斯布鲁克的工作拉开了现代代数几何学的帷幕，其中陈类成了不可或缺的概念。我想陈师看到他的论文发表不出十年竟有此成就，也会觉得惊讶。据先生所言，1948 年威尔曾跟别人包括杨振宁说，陈类将在物理系统的量子化中发挥作用，陈先生或许觉得这是开玩笑，然而其后的发展却印证了此言不虚，事实上陈类的作用比想像中的还要大。第二陈类也是如此，陈-西蒙斯不变量正在理论物理如异常性中广泛使用。

论文《埃尔米特流形的示性类》是在 1946 年发表的，此文为复流形上的埃尔米特几何奠定了基石，埃尔米特连络面世了。令 $\Omega$ 为一向量丛的曲率

形式，以下式来定义

$$\det\left(\mathrm{I}+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega t\right)=\mathbf{1}+c_1(\Omega)t+\cdots+c_q(\Omega)t^q$$

利用微分形式定义陈类有其长处，这样的做法无论在几何或现代物理都极其重要。

举例而言，陈先生创造了超度这概念。令 $\omega$ 为定义在一向量丛的标架丛上的连络形式，则其曲率形式由公式 $\Omega=\mathrm{d}\omega-\omega\wedge\omega$ 给出，我们有

$$c_1(\Omega)=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\mathrm{Tr}(\Omega)=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\mathrm{d}(\mathrm{Tr}(\omega)).$$

类似地，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\Omega\wedge\Omega)&=\mathrm{d}\left(\mathrm{Tr}(\omega\wedge\omega)+\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\omega\wedge\omega\wedge\omega)\right)\\&=\mathrm{d}(CS(\omega)).\end{aligned}$$

这里的 $CS(\omega)$ 称为陈-西蒙斯形式，它在三维流形、异常消除、弦论和凝聚态物理中当担当着重要的角色。

在形式的层次进行超度，便得到了在同调上的第二层运算如梅西（Massey）乘积，这些概念在陈国才有关逐次积分的工作中出现。当流形是复流形时，我们把 d 写作 $\partial+\bar{\partial}$。在一篇和博特（R. Bott）合作的经典论文中，他们发现，对每一个 $i$，都有一个自然构造的 $(i-1,i-1)$ 形式 $\tilde{T}c_i(\Omega)$，使得 $c_i(\Omega)=\partial\bar{\partial}(\tilde{T}c_i(\Omega))$。

陈先生利用这个定理，把奈望林纳（Nevanlinna）的值分佈理论推广到高维复流形的全纯函数上去。形式 $\tilde{T}c_i(\Omega)$ 在阿列克洛夫（Arakelov）理论也起着根本的作用。唐纳森（S. Donaldson）利用 $i=2$ 的情况证明了在代数曲面上关于埃尔米特杨-米尔斯方程的唐纳森-乌伦贝克-丘定理。当 $i=1$ 时，第一陈类由下面公式给出

$$c_1=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\det(h_{i\bar{j}})$$

其中 $h_{i\bar{j}}$ 是埃尔米特尺度，公式的右面是尺度的里奇张量。

1950 年，陈先生到了芝加哥大学，他和斯潘尼尔（E. Spanier）合作，完成了一篇有关球面纤维丛的同调论的文章。在文章中，他们证明了汤姆同构定理，这定理非常有用（汤姆（R. Thom）也在同一年，独立地证明了这定理）。1953 年，在《复球面丛和代数簇上的示性类》一文中，先生说明了考

虑一个以旗流形为纤维的相关纤维丛，示性类可以用线丛来定义。作为推论，一个代数流形的示性类的对偶同调类中，必有一个代数圆环作为代表。此文给出 $K$-论中的分裂原理，而在和汤姆同构定理结合后，正如格罗腾迪后来指出一样，可以用来定义在相关丛上的陈类。霍奇考究了如何用代数圆环来表示同调类。他利用了陈先生上述的定理，但只能在流形是在投影空间中非奇异超曲面的完全交集时证明了这是可能的。

陈先生的定理是第一个、同时也是最一般的「霍奇猜想」。它也是首次把全纯的 $K$-论和代数圆环连系起来。陈先生创造几何不变量的功力深厚，世人无出其右，从他在投影几何、仿射几何、以及拟凸区域上的陈-摩不变量的工作中昭昭可见。他和列文（H. Levine）、尼伦伯格（L. Nirenberg）曾经定义在复流形上同调群的内蕴范数，至今尚未为人深究。陈先生在去世前还有一个主要计划，即研究更一般的几何中的卡当-凯勒系统。

另一方面，他在利赫那洛维茨（A. Lichnerowicz）的著作《连络的整体理论和和乐群》的书评中，指出透过卡当的经典工作，可知利维-奇维塔和舒顿在连络上的成就，背后的指导思想正是群的概念。他又指出一般人把卡当的定义混淆了。卡当的「切空间」即今天的纤维，而他的标架空间即今天的主纤维丛。在同一书评中，陈先生说，和乐群是连络理论中很自然的概念。但事实并不如他所料，贝格和辛格其后发现，除齐次空间外，它并不是一个很好用不变量。多年之后，辛格（I. Singer）告诉我，他在芝加哥当研究生时上过陈先生的几何课，他把笔记本给当时在 MIT 的安布罗斯（W. Ambrose）。稍后，他们证明了今天以他们命名的定理，把和乐群的李代数和曲率张量连系起来。法国的贝格更进一步，把在黎曼几何中有可能作为和乐群的李群都作了分类，其后西蒙斯给出了一个更概念化的证明。

和乐群是卡当 1926 年引入的，它和流形的内在对称有关，也给今天物理学中的超对称赋予几何意义。凯勒流形的和乐群是酉群，卡拉比-丘流形的和乐群是特殊酉群。和陈先生的期望相反，现代几何中最引人入胜的流形，它们的和乐群都很特殊。这些流形的构造依赖于非线性分析，这不是陈先生熟悉的领域。

值得留意的是，自从小平邦彦的工作之后，陈先生在芝加哥开了一门课凯勒流形的霍奇理论，课中利用了位势理论作工具。可是，到了六十年代末期，陈先生写了本名为《没有势位论的复分析》的小书。当时小平邦彦开创使用代数几何上的消亡定理为工具，并证明了著名的小平嵌入定理。不知怎

的，先生对凯勒几何的兴趣就渐渐淡下来了。五十年代末期，先生对极小曲面这个古老课题发生兴趣。卡拉比有关高维球面上最小二维球的整体理论甫面世，他即时被吸引了。

1960 年，先生从芝加哥迁往加州的柏克莱。1967 年，他和奥瑟曼（R. Osserman）观察到，高维欧氏空间中的极小曲面，其高斯映照可视为从曲面到二维平面的格拉斯曼流形上的映照，此时它是反全纯的。因此人们可以把全纯曲线的理论用到极小曲面上去，从而给伯恩斯坦和奥瑟曼的工作给出新证明（二维平面组成的格拉斯曼流形具有自然的复结构）。由此得到启发，他发表了好几篇文章，部分是和学生伍夫森（J. Wolfson）合作的，讨论从二维球面到格拉斯曼流形的调和映照。那时这类想法颇为流行，乌伦贝克（K. Uhlenbeck）、伯斯塔尔（F. Burstall）、伍德（J. Wood）等人皆有相关著作发表。在这项工作的同时，他也对凯勒流形间的全纯映照发生兴趣。他推广了阿尔福斯有关施瓦兹引理的结果到高维复流形。他也意识到负的曲率导致全纯映照的有界性，这点早已由阿尔福斯看出了。这观察引出了以后小林昭七（S. Kobayashi）在双曲流形上的工作和格拉菲思（P. Griffiths）的工作。陈先生在柏克莱极小曲面的讲座，影响了西蒙斯在高维极小子簇上的工作。这项重要的工作使人们了解极小锥面的稳定性，对解决伯恩斯坦问题很有帮助。伯恩斯坦问题是了解极小子簇奇异点的关键。

陈先生最后的重要工作完成于上世纪七十年代，首先是和西蒙斯合作，引入了陈-西蒙斯不变量，其次是与摩瑟（J. Moser）合作研究强拟凸区域，创造了今天称作陈-摩瑟的不变量。第一项工作受到高斯-博内定理证明中的超度想法启发，陈-西蒙斯不变量已成为理论物理和凝聚态物理的基石。陈-摩瑟不变量则继承卡当未竟之功，找到了在双全纯映射下区域的局部不变量。

过去四十年间，陈-西蒙斯形式在理论物理愈见其重要性。其中的发展可略述如下：

1. 1978 年，Albert Schwarz 提出了一套包含了陈-西蒙斯理论的拓扑量子场论。他的论文题为《退化二次泛函的分割函数和雷-辛格不变量》，数学物理通讯 2，247-252。
2. 1981 年，Jackiw 和学生 Templeton 研究了带有陈-西蒙斯项的三维 QED；1982 年，又研究了非可换规范场论和三维的爱因斯坦重力。

3. 1981 年，Laughlin 发表了二维的量子化霍尔传导性的论文，次年又发表了分数的量子霍尔效应的论文，其中的低能量可以用陈-西蒙斯项来描述。随后的工作者有 Wilczek, Zee, Polyakov 等人。
4. 威腾把三维的陈-西蒙斯发展成和琼斯多项式有关的一套量子理论。威腾的文章激起了对绳结理论的一轮探索，包括对三维双曲流形的所谓「体积猜想」。陈-西蒙斯理论及其在凝聚态物理上的推广内容庞大，难以在此综述。

这两件重要工作完成后，陈先生依然活跃。他在蹼几何、映入复格拉斯曼流形的调和映照、李球面几何等题目上也发表了文章。然而和他早期的不朽工作相比较，这些文章显然是逊色了，这也难怪，毕竟先生年事已高，精力衰减是自然的。

## 6. 小结

当我还是学生时，陈师曾对我说，他喜欢数学皆因数学有趣，并且是他擅长的东西。从高斯-博内定理的证明可见，他能从容不迫地处理极度繁复的计算。虽然陈先生对现代几何的贡献至钜，但按他本人的说法，他并非如别人所想那样，对几何有一全面的看法，并以之为方向。他时常强调良师益友，互相砥砺交流的重要性。

陈先生说：复数在几何中为何如此重要？对我来说，这是个谜。它整齐有序，无所不包。先生对古代中国数学没有发现复数引以为憾。他在复几何中不朽的贡献，也算是对过去两千年中国数学家缺失的保偿吧。

在生命的最后阶段，他曾推介芬士拿几何（Finsler Geometry）。他和包大卫、沈忠民写了一本芬士拿几何的书。由于这门几何没有就具体的模型来发挥，整套理论难以深入。例如，在蒂希米勒（Teichmüller）空间或小林双曲空间中出现了具体的芬士拿几何，但他们的理论却用不上。黎曼在他的论文中，曾考虑过把黎曼尺度中微分的次方由平方换为四次方，以处理非常遥距的空间几何。四次方尺度生成的几何会否丰富多彩，我们拭目以待。其中的等价问题，变成了如何找到所有不变量，以决定两个四次方的微分在变量变换下相同。或许我们可以先考虑两个二次形式的对称张量积。

陈先生对黎曼、卡当、魏尔和威尔佩服得五体投地，但不无讽刺地，他并不认为爱因斯坦有何了不起，而且他也对来自理论物理的崭新想法反应缓慢，对和量子场论沾上边的几何兴趣不大。黎曼的梦想是了解极小的宇宙，

这要求对量子场论、甚至一种全新的量子几何有充分的了解。不过话说回来，陈先生也不是一成不变的。当初我跟他谈起求解卡拉比猜想时，他唯唯否否，但其后他意识到这猜想可以用来解决他在代数几何中的某些问题时，他的看法就不同了。自此他感受到非线性分析在几何的威力。他重新跟中国接触后，组织了一系列的国际会议，议题便是《微分几何和微分方程会议》，由此可见他看法的变化。

毫无疑问，作为大数学家的陈省身先生，将会在数学史上流芳百世，世人不会忘记他对纤维丛和示性类的贡献。2004 年 11 月即先生去世前一个月，国际天文学联盟把一颗小行星命名以志纪念。这颗位于主要星带编号 29552 的陈省身星将会在太阳系中运行不息，而先生的思想和教导则流播于数学的天地之间，两者遥相呼应。

哈佛大学数学科学及应用中心新近开办了“数理科学文献”讲座，旨在绍介现代数学各分枝之主要发展，使听众对数学有一整体的认识。作者给出了这系列讲座的第一讲，本文即由演讲整理而成。陈省身先生是当代几何学大师，对后世的影响深远，同时也是作者的论文导师，以此为题开讲，可说是最适合的了。

## 参考文献

请参见英文原文,下载地址:https://cmsa.fas.harvard.edu/wp-content/uploads/2020/05/2020-04-22-essay-on-Chern-english-v1.pdf