"十二五"国家重点图书

Advances in Materials and Mechanics

量纲分析与Lie群

Dimensional Analysis and Lie Group

孙博华

高等教育出版社

"十二五"国家重点图书

Advances in Materials and Mechanics

量纲分析与Lie群

Dimensional Analysis and Lie Group

孙博华

高等教育出版社·北京

Author

Prof. Bohua Sun

Cape Peninsula University of Technology, South Africa

E-mail: bohua.sun@gmail.com

sunb@cput.ac.za

图书在版编目 (CIP) 数据

量纲分析与 Lie 群 / 孙博华编著. -- 北京：高等教育出版社, 2016. 6

(材料与力学进展 / 孙博华主编)

ISBN 978-7-04-045517-5

I. ①量… II. ①孙… III. ①量纲分析-研究②李群-研究 IV. ①O303 ②O152.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 102049 号

策划编辑 刘剑波　责任编辑 卢艳茹　封面设计 杨立新　版式设计 童 丹
插图绘制 杜晓丹　责任校对 胡美萍　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　刷	北京中科印刷有限公司		http://www.hepmall.com
开　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　张	12.75		
字　数	240 千字	版　次	2016 年 6 月第 1 版
购书热线	010-58581118	印　次	2016 年 6 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	49.00 元

物料号 45517-00

Advances in Materials and Mechanics 13 (AMM 13)

材料与力学进展 13

Advances in Materials and Mechanics (AMM)

前言

当处理一个科学或工程问题时，首先要从物理的角度深刻理解该问题，列出问题所涉及的各种物理参量，然后使用量分析找到这些参量之间的关系，发现问题的总体关系，在此基础上再利用物理原理建立问题的控制方程，即建模。建模之后，问题就变成了数学问题，即需要求解相应的控制方程，以便从量上对问题有深刻的了解。研究工程和科学问题一般都需要建模和求解的过程，有时还需要做试验。

建模的过程就是构建各物理量之间关系的过程，对于简单问题这个过程不一定复杂，但对于有些问题建模可能很复杂，甚至一时还无法建模。一般来讲，对于复杂问题，特别是第一次遇到的问题，一般都要先进行问题的量纲分析和相似性研究，尽量找出各物理量之间的一般性关系，以便指导建模过程。

科学和工程中的大多数问题是非线性的，对应的控制方程为非线性方程。求解非线性方程是一项困难的工作，求精确解就更加困难。虽然有不少求解非线性偏微分方程的方法，但对于变系数非线性偏微分方程，目前的研究手段主要还停留在数值求解或近似求解。

随着计算机的发展，计算能力越来越强大，数值方法也随之得到很大的发展，已经有了许多商业化科学计算软件。虽然数值方法有许多优点，但由于它只能给出特定条件下的结果，很难由此推广或预测更一般的情况，所以包含更多信息的解析解或精确解一直是科学界孜孜追求的目标。虽然有些非线性问题可以通过变换得到精确解，但这种变换往往需要特别的技巧，而这些技巧只能就事论事，没有一般性，很难推广。因此，求解非线性 (包括线性) 微分方程的一般性的方法，是人们一直探求的目标之一。

挪威数学家 Sophus Lie 于 1870 年左右提出了一种连续变换群的方法 (也称 Lie 群或 Lie 群对称方法)。可以通过 Lie 群或对称群变换，简化原来的方程并获得精确解。这个方法不需要特别的变换技巧，是一种系统方法，不仅适用于线性微分方程，也适用于非线性微分方程，是目前最强有力的一般解析工具。Lie 群对称性分析不仅可用于求解，也可以指导构造数值算法。虽然 Lie 群最初是为了求解微分方程而提出的，距今已经有 140 年，但其应用主要侧重数学和物理理论方面，而不侧重微分方程的求解。目前有关 Lie 群的书籍都非常抽象，很难适用于理工科的学生和研究者。Lie 群的最初目的就是求解微分方程，所以为理工科学生编写一本用 Lie 群求解微分方程的书，是这本书的写作动机之一。

量纲分析有时也称相似论，实际上是基于物理量纲的齐次不变性，即数学上

的对称性, 对称性是 Lie 群的核心。所以, 美国著名学者 Cantwell[①] 倡议: 理工科的学生, 一要学习量纲分析方法, 二要掌握 Lie 群对称分析。前者用来建立物理模型, 后者用来求解。作者非常同意这个观点, 这就是为什么把量纲分析与 Lie 群合写在一本书中的原因, 以此希望读者关注它们之间的内在联系。

近几年, 作者受邀回国进行学术访问, 先后在北京大学、北京科技大学、中国科学院大学、北京理工大学、南方科技大学、北京航空航天大学、昆明理工大学、西安建筑科技大学和清华大学等高校就相关内容做过交流或讲座。从反馈看, 大家都渴望简明易懂、适合理工科学生的相关书籍出版。

本书是一本把量纲分析与 Lie 群合在一起的书, 希望学生可在较短时间内掌握量纲分析和 Lie 群对称性分析方法。本书除了介绍前人的成果外, 部分材料取自作者在不同时期的教学研究心得和学术成果。

在量纲分析及其应用部分, 介绍了量纲的基本概念, 包括量纲一致性定律和 Π 定理、量纲分析的 6 步法、定向量纲分析和相似论, 并通过一系列的例子展示了量纲分析的普适性。除了一些经典例子外, 还有一些实例涉及工程领域中非常重要的问题, 如破甲弹金属射流的稳定性问题、薄板在高速射流冲击下的撕裂问题、固体的断裂问题、航天器液体推进剂的晃动问题、海面原油泄漏的扩展问题、风吹声问题、不可压各向同性湍流的标度律、可压缩湍流的能谱标度律、湍流噪声问题、点源强爆炸问题、沙漠治理中草方格的障沙问题、考虑温度变化时微机电系统 (MEMS) 陀螺仪的标度律和水力压裂问题等。文中还给出了点源强爆炸至今较全面的科学史介绍。

在 Lie 群及其应用部分, 介绍了 Lie 群对称的概念、无穷小生成元和 Lie 代数、泛函的 Noether 守恒律、微分方程的不变量和相似解的寻求过程、Lie 群对称方法的外微分形式、符号运算的软件。为了让读者可以更好更快地理解并应用 Lie 群解决自己的科学问题, 书中细致介绍了一些实例, 如传热问题、无黏性流体的 Euler 方程的 Lie 群对称性分析、黏性流体的 Navier-Stokes 方程的 Lie 群对称性分析、二维流体边界层方程的 Lie 群对称性分析、平板大挠度的 von Kármán 方程、二维平行剪切流的线性稳定 Orr-Sommerfeld 方程的 Lie 群对称性分析、弹性力学的 Noether 守恒律、一般非线性 Burgers 方程的精确解和湍流边界层。书中还特别强调量纲分析 (相似论) 与 Lie 群对称性分析的内在联系, 如不变量 (相似变量) 的确定。

量纲分析的核心 —— Π 定理[②] 从 1914 年发表至今已有百年; Lie 群是由挪威数学家 Sophus Lie 于 1870 年左右开创发展的, 本书算作作者对量纲分析发展百年和对 Lie 群开创 140 周年的纪念。

应当指出, 作者作为非数学专业的教授在介绍 Lie 群时, 并不追求数学上的

---

① Cantwell B J. Introduction to Symmetry Analysis[M]. Cambridge:Cambridge University Press, 2002.

② Buckingham E. On physically similar systems: Illustration of the use of dimensional equations[J]. Phys. Rev., 1914, 4: 345-376.

严格性和数学证明，而是完全从应用的角度来介绍有关内容，如果您需要更深入地了解，请参考有关的数学书籍。

本书在南非开普敦完成撰写，在南方科技大学完成第一次校对。作者对南方科技大学校长陈十一院士的邀请表示感谢，访问期间没有任何任务的轻松（所以有点不安），使我在完成书稿校对的同时，还有时间到几所大学做讲座或交流。南方科技大学是一所只成立 5 年的年轻大学，朝气蓬勃，充满希望。

作者在写作过程中对从参考文献获得的灵感和知识深怀感恩。感谢高等教育出版社刘剑波编辑的鼓励，她对高质量学术著作的执著推动令人钦佩。感谢卢艳茹编辑及其他编辑的细致审阅，他们发现文字和公式中笔误的专业能力给我留下深刻印象。要特别感谢家人的支持，使我可以全身心地投入到本书的写作中，没有他们的支持就没有本书。

年迈的父母还时刻牵挂着我们，荣幸地将此书献给敬爱的父母！感谢父母的养育之恩，衷心祝愿父母健康长寿。

孙博华

2015 年 10 月 10 日完成于开普敦好望斋

2016 年 1 月 16 日第一次校对于南方科技大学

2016 年 3 月 27 日复活节第二次校对于开普敦大学图书馆

目录

5.3 相似变量 · · ·

6.14.3 轴对称流动 · · ·

13.2 多变量情况下的导数和全导数 · · ·

第十七章 量纲理论与 Lie 群 · · ·

第一章
量纲分析

随着人类对自然的探索活动的深入，遇到的问题也愈来愈复杂。涉及多尺度、多层次、多材料、多物理的耦合问题对计算技术的要求愈来愈高，但计算产生的大数据是否正确还需要认真分析判断，这种数据分析必须建立在正确的物理模型基础之上，否则就会产生海量的垃圾数据。

解决一个复杂问题，除了需要理解具体问题的物理理论，还需要掌握与物理概念密切相关的量纲分析方法和相似论。它们既可以用于数据整理，也可以在不求解问题前对问题的结果有个定量和定性的把握。对于有些复杂问题，建立其数学模型有时可能非常困难，或者方程非常复杂难以求解，或者求解的过程非常复杂不便于实际应用。有时需要做试验，但实际尺寸很难在试验条件中实现，必须缩小尺寸做模型试验，这时要求必须满足一定的相似条件，这种条件必须建立在量纲分析和相似论的基础上。一般来讲，对于复杂问题，特别是第一次研究，一般都要先进行量纲分析和相似性研究，尽量找出一般性规律，发现主导控制参量，细化演化过程，以便在建模和分析时简化问题。

量纲分析 (dimensional analysis) 很难说从何时产生，基本上它是古希腊几何中相似与比例的概念的推广。很多科学大师如 Newton、Fourier[1]、Maxwell[2]、Einstein 等处理问题时内心深处其实是有量纲 (dimension) 概念的，但不成系统。法国数学家 J. B. Fourier 的名著 *Analytical Theory of Heat* (《热的解析理论》)[1]

中就有量纲分析的论述。20 世纪初, 量纲分析才逐渐成形, 并且成为物理学、数学中建立数学模型的重要方法之一。牛顿第二定律 $F = ma$, 其方程式应该与计量物理量的量纲无关。由此得到一个重要结论：任何有意义的定律, 对于其方程式的每一个计量量纲, 都必须是齐次方程式。这个认识的最终形式成为 Π 定理, 即假设一个有物理意义的方程式具有 n 个参量和 m 个基本量纲。Π 定理描述了怎样将此方程式等价地写成具有 $(n-m)$ 个无量纲量的方程式。更重要的是, 根据给定的参量, 这个定理给出了一种能够计算这些无量纲量的方法。

通过量纲分析可以检查反映物理现象规律的方程在量纲方面是否合理。它是在经验和试验的基础上, 利用物理定律的量纲平衡即齐次定理, 确定各物理量之间的关系。一个成熟的物理学家在探究某一个问题的时候, 往往是从定性或者半定量的角度入手分析, 使用的方法如量级分析、量纲分析、对称性分析等。

在量纲分析发展历史上, 一个特别有名的案例是第二次世界大战期间英国力学大师 G. I. Taylor 为研究原子弹爆炸 —— 点源强爆炸, 发现了冲击波球面半径与时间的 2/5 次方成正比的规律, 并从量纲分析的角度引进新的相似变量 (similar variable), 将偏微分方程组转化为常微分方程, 从而得出自相似解 (self-similar solution), 计算预测了美国第一颗原子弹的爆炸当量。这曾在国际社会引起很大的反响, 导致美国要调查是否有泄密事件。

量纲分析是一种非常值得研究和学习的科学方法, 它是探讨科学规律、解决科学和工程问题的一种有用的工具和普适方法。

第二章
量纲分析的基本概念和 Π 定理

作为一种科学方法, 量纲分析有它的核心概念和定理, 理解它们对于灵活使用其分析问题非常重要。量纲分析和相似论课程的核心知识点包括量纲概念、7 个基本量纲、量纲的幂次律、量纲一致性定律、Π 定理、量纲分析的 6 步法、模型试验与原问题的相似模数都必须相等。

2.1 量纲

任何物理量都有量纲或单位, 该物理量的大小就是这个单位的多少倍, 即一个标量乘这个单位。如长度 10 m, 其中 m 是度量这个长度的单位, 而 10 是这个长度和 m 所表示的单位长度的比例。很明显, 用来度量这个物理量的单位和这个物理量本身一定是同一类型的量, 或者说, 这些量的量纲是相同的。长度的量纲用 L 来表示, 而不特别说明具体是用 m、cm 还是 mm, 只要是长度量纲就行。

当然也有一些量是没有量纲的, 我们就称其为无量纲量 (或称为量纲一的量), 如角度和一些导出的量。

物理世界千变万化, 看起来非常复杂, 但值得庆幸的是, 基本的物理量量纲

一共只有 7 个。所以有如下结论:

定律 2.1 (基本物理量的量纲定律) 基本物理量的量纲一共只有 7 个; 所有其他的物理量的量纲都是其组合的导出量纲。

通过一个问题所涉及的基本物理量的量纲的个数可以预测这个问题的复杂程度, 当然越多越复杂, 但最多就是 7 个 (如表 2.1 所示)。近几年来, 科学界比较关注的多物理问题从本质上看就是这些问题涉及的基本物理量较多, 但也不会多于 7 个。

例如, 纯力学类系统只涉及 3 个基本物理量 (质量、长度和时间), 如果考虑温度变化的热力学过程就需要加上基本物理量温度。

表 2.1 基本物理量的量纲及 SI 单位

基本物理量的名称	量纲	SI 单位
质量	M	kg(kilogram)[a]
长度	L	m(meter)[b]
时间	T	s(second)[c]
热力学温度	Θ	K(kelvin)[d]
电流	I	A(ampere)[e]
发光强度	J	cd(candela)[f]
物质的量	N	mol(mole)[g]

[a] 光在真空中于 1/299 792 458 s 内行进的距离定义为 1 m。

[b] 存放于法国巴黎国际度量衡局的国际千克原器的质量定义为 1 kg。

[c] 铯 133 原子基态的两个超精细能阶间跃迁对应辐射的 9 192 631 770 个周期的持续时间定义为 1 s。

[d] 水的三相点温度的 1/273.16 定义为 1 K。

[e] 在真空中相距为 1 m 的两根无限长平行直导线, 通以相等的恒定电流, 当每米导线上所受作用力为 2×10^{-7} N 时, 各导线上的电流为 1 A。

[f] 给定一个频率为 540.015 4×1 012 Hz 的单色辐射光源 (黄绿色可见光) 与一个方向, 且该辐射源在该方向的辐射强度为 1/683 W/sr, 则该辐射源在该方向的发光强度为 1 cd。

[g] 所含基本微粒个数与 0.012 kg 碳 –12 中所含原子个数相等的一系统的物质的量定义为 1 mol。

例如液体表面张力的量纲问题。液体的内聚力是形成表面张力的原因。在液体内部, 分子在每个方向都受到邻近分子的吸引力 (也包括排斥力), 因此, 液体内部分子受到的分子力合力为零。然而, 在液体与气体的分界面上的液体分子在各个方向受到的引力是不均衡的, 造成表面层中的分子受到指向液体内部的吸引力, 并且有一些分子被 “拉” 到液体内部。因此, 液体会有液面面积缩小的趋势, 在宏观上的表现即为表面张力现象。

一些昆虫如水黾可以利用表面张力在水面上爬行, 如图 2.1 所示。非常扁的物体如铝质或镍质的钱币、剃须刀片或铝膜也可以通过表面张力浮在水面上。生活中其他表面张力的例子如水滴形成圆球状, 针浮在水面上, 荷叶上的水滴呈圆球状。在表面张力高的情况下, 水不仅不易浸湿物体, 还会从物体表面反弹。洗衣粉的作用之一就是降低水的表面张力。

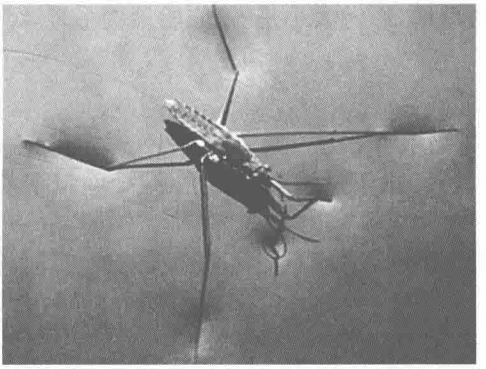

图 2.1 水黾在水面上爬行

表面张力 σ_{s} 的量纲为

$$\dim \sigma_{\mathrm{s}} = \dim \frac{\text{力}}{\text{长度}} = \frac{\frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{T}^2}}{\mathrm{L}} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{T}^2} = \mathrm{MT}^{-2} \tag{2.1}$$

研究液体的表面张力对于许多学科特别重要, 如材料和生物技术。现在所研究的“不需要洗的衣服”, 其本质就是希望开发出一种超疏水性材料。

2.2 量纲的幂次律

量纲是物理量的种类属性, 物理量的量纲反映该物理量随基本物理量的量纲变化而变化的倍数。物理量的量纲如何来表达? 它一般是什么形式? 在力学系统中, 基本物理量的量纲有 3 个: 长度的量纲 L、质量的量纲 M 和时间的量纲 T。这个系统中的任何物理量 Y 的量纲都可以表示为

$$\dim Y = \mathrm{L}^a \mathrm{M}^b \mathrm{T}^c \tag{2.2}$$

其中, a, b, c 为实数。

一个无量纲的纯数 A 的量纲也可以这样表达, 只是其幂次都为零, 即

$$\dim A = \mathrm{L}^0 \mathrm{M}^0 \mathrm{T}^0 \tag{2.3}$$

其实这个结果是一般性的。一个问题的基本量纲一旦确定, 其中的任何物理量的量纲都可以表达成基本量纲的幂次形式。

定律 2.2 (量纲的幂次律) *任何物理量的量纲式都是基本量纲的幂次单项式的形式。*

这个定律可以分为以下几步来说明:

(1) 例如, 一个物理量 X 的大小是 x, 原始量纲系是 A, 所以有

$$X = x\mathrm{A} \tag{2.4}$$

(2) 如果将原始量纲系 A 改变 (放大和缩小) 一个倍数 λ 得到一个新量纲系 B, 从而有 $X = y\mathrm{B}$。显然, 由于量纲系改变了, 这个新量纲系 B 的大小也改变为 y。

我们知道, 量纲改变不改变物理量本身, 而只改变其与量纲的比例大小, 所以

$$X = x\mathrm{A} = y\mathrm{B} \tag{2.5}$$

即

$$\frac{y}{x} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \tag{2.6}$$

但因为量纲系 B 是由原始量纲系 A 改变 λ 倍得来的, y/x 一定取决于改变的倍数 λ, 所以应该是 λ 的函数, 即

$$\frac{y}{x} = f(\lambda) \tag{2.7}$$

(3) 如果将原始量纲系改变 β 倍得到另一个量纲系 C, 则有 $X = z\mathrm{C} = x\mathrm{A} = y\mathrm{B}$。显然, 从原始量纲系 A 变到量纲系 C, 有如下关系:

$$\frac{z}{x} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}} = f(\beta) \tag{2.8}$$

这样就有关系

$$\frac{\frac{z}{x}}{\frac{y}{x}} = \frac{z}{y} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}} = \frac{f(\beta)}{f(\lambda)} \tag{2.9}$$

当然, 量纲系 C 也可以由量纲系 B 改变得到, 不过改变的倍数是 β/λ, 从而有

$$\frac{z}{y} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}} = f\left(\frac{\beta}{\lambda}\right) \tag{2.10}$$

(4) 现在来确定函数 $f(:)$ 的具体形式。比较以上的结果, 有

$$\frac{z}{y} = \frac{f(\beta)}{f(\lambda)} = f\left(\frac{\beta}{\lambda}\right) \tag{2.11}$$

上式两边对 β 微分, 并令 $\beta = \lambda = \alpha$, 得

$$\frac{1}{f(\alpha)}\frac{\mathrm{d}f(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}f(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\bigg|_{\xi=\frac{\beta}{\lambda}=1} \tag{2.12}$$

因为 $\mathrm{d}f(\xi)/\mathrm{d}\xi|_{\xi=\beta/\lambda=1}$ 是常数, 取为 m。以上对 α 积分, 得

$$f(\alpha) = C\alpha^m \tag{2.13}$$

对于 $\alpha = 1$, 即基本量纲不变时, 显然 $f(\alpha) = 1$, 所以 $C = 1$。因此, 函数 $f(:)$ 的形式为

$$f(\alpha) = \alpha^m \tag{2.14}$$

与之对应的量纲就是

$$\dim X = \mathrm{A}^m \tag{2.15}$$

这是一个量纲的情形。如同时有几个量纲, 就是几个幂次项的乘积。如对力学 L–M–T 系统, 其中的力 F 的量纲就是

$$\dim F = \mathrm{MLT}^{-2} \tag{2.16}$$

这里的幂次律本质对应 Lie 群的拉伸群, 参见本书的最后一章。

2.3 量纲一致性定律

俗话说, 苹果与梨不能相加 (图 2.2)。就是说, 量纲不同的物理量是不能相加的。实际上, 相加后你也不知道会得到什么量, 例如质量 + 时间是什么, 谁也不知道。

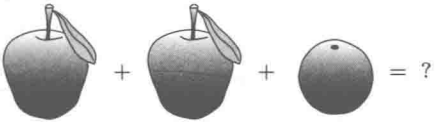

图 2.2 不同性质的东西不能相加

定律 2.3 (量纲一致性定律) *每个在公式中相加的量其量纲必须一致。*

例如, Einstein 公式 $E = mc^2$, 量纲关系是 $\mathrm{ML^2T^{-2}} = \mathrm{M(L/T)^2}$。

如果在推导公式时发现某些项的量纲不一致, 那一定是推导有误, 必须保证公式中的每一项的量纲一致。

与量纲一致性定律相关的一个原理是, 描写真实世界的物理定律中的物理量与测量这些物理量的单位无关。例如, 在力学的牛顿第二定律 $F = ma$ 中, 质量的单位可以用 kg, 也可以用 g, 不管用什么单位, 该公式都应该成立。与物理量的单位无关, 反映了物理定律一个非常重要的不变性原理, 这在数学上实际就是 Lie 群对称性。

2.4 Π 定理

1914 年, Buckingham 发表了一个有关量纲分析的重要定理[3,4], 由于论文中的无量纲量用希腊大写字母 Π 表示, 1922 年被美国学者 P. W. Bridgman 在其

专著 *Dimensional Analysis*[5] 中命名为 Π 定理。Bridgman 的这本书是在他为哈佛大学研究生做的 5 次讲座基础上整理而成的, 是世界上第一部量纲分析专著。量纲分析理论在之后没有什么变化, 从现代的角度看, 这本书一点都不过时, 多次再版发行, 不愧是一部名著。1946 年, Bridgman 由于高压物理的研究获得诺贝尔物理学奖。有关 Π 定理, 据说俄国学者[6] 已于 1911 年独立发现。

定理 2.1 (Π 定理) 设有一个物理关系, $f(s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n) = 0$, 由一组量纲不同的物理量 $s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n$ 组成。设在这组物理量的量纲中有 j 个量纲是相互独立的, 并且选作基本量纲, 这个物理关系一定可以用 $k = n - j$ 个无量纲量 $\Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_k$ 完全表示出来, 即

$$f(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \cdots, \Pi_k) = 0 \tag{2.17}$$

其中, Π_i 由 $k = n - j$ 个 s_i 构成, $\Pi_i = s_1^{a_1} s_2^{a_2} \cdots s_k^{a_k}$。

这里的 j 不能是任意的值, 基本量纲只有 7 个, 所以 j 的最大值是 7, 一般情况下, $j \leqslant 7$。但在定向量纲分析中, 可以通过引入长度的方向性, 增加基本量纲, 但本质上也没有增加物理量的基本量纲, 仍然是 7 个。

Π 定理还可以有以下简单表达:

定理 2.2 (Π 定理) 设一个物理问题中有 $n = m + 1$ 个变量, 其中包括 m 个自变量 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$, 1 个因变量 y。如果该问题中有 j 个基本量纲, 那么就一定有 $k = n - j$ 个无量纲量 $\Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_k$, 且有

$$f(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \cdots, \Pi_k) = 0 \tag{2.18}$$

从以上的 Π 定理的表述来看, 可能给人的感觉是量纲分析很困难[7]。其实只要对问题在物理方面有比较好的了解, 使用下面的 6 步法, 就可以较快地得到问题的标度律或相似关系。

2.5 量纲分析的 6 步法

Π 定理给出了构造无量纲量 Π 的一般方法, 在此基础上人们总结出一个简单的 6 步法 (表 2.2), 有时称为重复参量法[8]。

应当指出, 在 Step 3 中有 "猜测 j 值", 这就给人一种不确定的感觉, 从而使量纲分析有些随意性。由于这个原因, 量纲分析也的确有些技巧或 "艺术" 的成分。一个复杂问题通过量纲分析解决后往往会给人一种智慧的冲击和享受, 所以好的量纲分析结果一般都是科学大作。

表 2.2 量纲分析的 6 步法

步骤	操作
Step 1	列出问题所有的参量 (有量纲参量、无量纲参量和常数) 并计算其个数。设一共有 n 个参量, 要保证任何在此列出的参量都是独立的, 不能用其他量表示
Step 2	列出所有 n 个参量的量纲 (注意基本量纲最多只有 7 个)
Step 3	猜测 j 个重复参量。作为第一次猜测, 取 j 值等于问题中基本量纲的个数, 即 Step 2 中的基本量纲数。根据 Π 定理, 可以构造 $k=n-j$ 个无量纲量 Π。如果得到的结果有问题, 需要改变 j 值再重复推导
Step 4	重复使用 j 个基本量纲, 用于构造每一个无量纲量 Π, 这样的无量纲量 Π 一共有 $k=n-j$ 个
Step 5	把所得的所有 k 个无量纲量 Π 列出, 必要时进行适当整理, 并转化成科学界已经命名的无量纲量。
Step 6	验证所有的无量纲量 Π, 并写出问题的最终量纲关系。由于这种关系都是以幂次形式表现, 所以也称为幂次律 (power law)、标度律 (scaling law)

确定重复参量是量纲分析的难点, 一般情况从物理方面思考才比较准确, 例如管道中流体流动摩擦阻力的问题, 其中有管道、液体和流动 3 个因素, 它们的相互作用导致摩擦阻力, 重复参量就必须反映管道和流动液体, 所以可以取管道的直径 D、液体的密度 ρ 和流动速度 V 作为重复参量。

2.6 量纲分析的难点

虽然 Π 定理给出了构造无量纲量 Π 的一般方法, 但人们在使用中会感到有一定的困难[7]。

(1) 如何确定问题的物理量, 就是参量个数 n 的问题。在一个物理问题中, 究竟哪些是必要的物理量, 有时很难决定。特别是新的科学问题, 问题本身可能还没有确定。多余地加进一些关系不大的物理量, 常常会增加分析的复杂性, 但过少的物理量显然不能解决问题。这里就需要有高深的科学修养, 具体问题具体分析, 这个地方就有 "技巧" 和 "艺术" 的成分。

(2) 如何决定作为基本量纲的物理量, 就是 j 值的问题。在 n 个参量中, 选 j 个量作为基本物理量, 这时, 到底选哪个量作为基本物理量, 就是一个很关键的问题。显然, 不同的选择会构造出不同的一组无量纲量 Π。这个重要的问题没有一个标准和规律可循, 从而不同人会得到不同的结果。这就有结果好坏的问题, 是量纲分析中难度系数最大的部分。

(3) 无量纲量 Π 不是唯一的, 其相互的乘除和幂次都是无量纲量。这时, 需要把导出的无量纲量与历史上科学界已经命名的无量纲量比较, 并改写成该量的传统表示。

以上是量纲分析学习和使用时的难点, 必须通过实践训练才能掌握好这个

工具。学术上讲, 其中的一些问题只能通过相似论来解决。但是, 应用相似论, 就要求使用物理问题的基本方程。在很多实际问题中, 问题的基本方程常常还不很明白。在这些没有基本方程的复杂问题中, 量纲分析就比较有用。所以, 如果你研究的问题非常复杂, 还没有搞得太明白, 最好不要贸然开始, 建议先用量纲分析试试问题的难易程度。

2.7 一些常用的无量纲量

在科学发展史上, 人们在研究中引进了一些无量纲量。在量纲分析中要主动地把自己推导出的 Π 转化成已知的无量纲量, 这样就可以利用前人的经验成果, 同时也可以帮助我们对问题的本质有更深的理解。一些常用的无量纲量如表 2.3 所示。

表 2.3 常用的无量纲量

名称	符号	定义	物理意义
Archimedes 数	Ar	$Ar=\dfrac{gL^3\rho_1(\rho-\rho_1)}{\mu^2}$	外力与黏性力之比
Atwood 数	A	$A=\dfrac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1+\rho_2}$	液体混合的密度之比
Bejan 数	Be	$Be=\dfrac{\Delta PL^2}{\mu\alpha}$	沿槽道的压力损失
Bingham 数	Bm	$Bm=\dfrac{\tau_{\mathrm{y}}L}{\mu V}$	屈服应力与黏性力之比
Blake 数	Bl	$Bl=\dfrac{u\rho}{\mu(1-\epsilon)D}$	惯性力与黏性力之比
Bond 数	Bo	$Bo=\dfrac{\rho aL^2}{\gamma}$	重力与表面张力之比
Capillary 数	Ca	$Ca=\dfrac{\mu V}{\gamma}$	黏性力与表面张力之比
Cavitation 数	σ_{c}	$\sigma_{\mathrm{c}}=\dfrac{P-P_{\mathrm{v}}}{\rho V^2}$	气化压与动压之比
Deborah 数	De	$De=\dfrac{t_{\mathrm{c}}}{t_{\mathrm{p}}}$	应力松弛时间与观测时间之比
Eckert 数	Ec	$Ec=\dfrac{V^2}{c_p\Delta T}$	动能与焓之比
Ekman 数	Ek	$Ek=\dfrac{\nu}{2D^2\Omega\sin\varphi}$	黏性力与 Coriolis 力之比
Eötvös 数	Eo	$Eo=\dfrac{\Delta\rho g\,L^2}{\sigma}$	气泡重力与表面张力之比
Ericksen 数	Er	$Er=\dfrac{\mu vL}{K}$	黏性力与弹性力之比
Euler 数	Eu	$Eu=\dfrac{\Delta p}{\rho V^2}$	静压与动压之比
Froude 数	Fr	$Fr=\dfrac{v}{\sqrt{gl}}$	惯性力与重力之比

续表

名称	符号	定义	物理意义
Galileo 数	Ga	$Ga=\frac{gL^3}{\nu^2}$	重力与黏性力之比
Grashof 数	Gr^*	$Gr^*=\frac{g\beta(T_s-T_\infty)L^3}{\nu^2}$	浮力与黏性力之比
Knudsen 数	Kn	$Kn=\frac{\lambda}{L}$	分子自由程与物体特征长度之比
Laplace 数	La	$La=\frac{\sigma\rho L}{\mu^2}$	表面张力与动量传输之比
Lewis 数	Le	$Le=\frac{\alpha}{D}=\frac{Sc}{Pr}$	热扩散系数与介质扩散系数之比
Mach 数	Ma	$Ma=\frac{v}{c}$	流速与声速之比
Nusselt 数	Nu	$Nu=\frac{hd}{k}$	对流与传导之比
Ohnesorge 数	Oh	$Oh=\frac{\mu}{\sqrt{\rho\sigma L}}=\frac{\sqrt{We}}{Re}$	黏性力与表面张力之比
Prandtl 数	Pr	$Pr=\frac{\nu}{\alpha}=\frac{c_p\mu}{k}$	黏性扩散系数与热扩散系数之比
Reynolds 数	Re	$Re=\frac{vL\rho}{\mu}$	惯性力与黏性力之比
Rossby 数	Ro	$Ro=\frac{U}{Lf}$	惯性力与 Coriolis 力之比
Schmidt 数	Sc	$Sc=\frac{\nu}{D}$	黏性力与分子扩散律之比
Strouhal 数	Sr	$Sr=\frac{\omega L}{v}$	刻画流体振动的参量
Taylor 数	Ta	$Ta=\frac{4\Omega^2R^4}{\nu^2}$	旋转惯性力与黏性力之比
Weber 数	We	$We=\frac{\rho v^2 l}{\sigma}$	惯性力与表面张力之比
Weissenberg 数	Wi	$Wi=\dot{\gamma}\lambda$	黏弹性剪切力乘以松弛时间
Womersley 数	α	$\alpha=R(\frac{\omega\rho}{\mu})^{1/2}$	生物流体的脉冲流频率与黏性力之比

第三章
量纲分析的经典问题

3.1 肥皂泡中的压强问题

肥皂泡 (图 3.1) 是一层非常薄的带虹彩表面的空心形体膜[9]。肥皂泡的存在时间通常很短, 它们会因触碰到其他物体或维持于空气中太久而破裂 (重力令肥皂泡上方的膜变薄)。

肥皂泡的存在是因为液体 (通常是水) 的表面层有一种特定的表面张力, 它导致该层的行为像弹性膜。一个常见误解是以为肥皂增加了水的表面张力。实际上, 肥皂做了相反的事情, 它将张力减小到约纯水的 1/3。肥皂不增强肥皂泡, 而是通过一种称为 Marangoni 效应的作用稳定它们。随着肥皂膜的拉伸, 肥皂的密度减小, 使得表面张力增加。

假设肥皂泡的半径为 R, 肥皂泡的表面张力为 σ_{s}, 内压为 P_{inside}, 外压为 P_{outside}, 这样压差就是 $\Delta P = P_{\mathrm{inside}} - P_{\mathrm{outside}}$, 现在的问题是求压差 ΔP (这里不考虑重力作用、温度变化等因素)[9]。

Step 1: 列出问题所有的参量 (有量纲参量、无量纲参量和常数) 并计算其个数 n。

对于这个问题, 有 3 个参量, 即 R, ΔP 和 σ_{s}, 因此 $n = 3$。

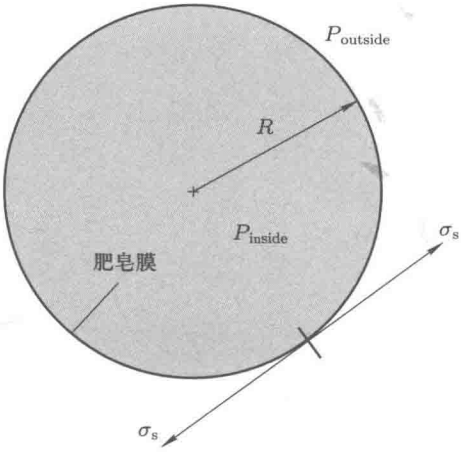

图 3.1　肥皂泡中的压强

本问题是要确定关系

$$\Delta P = f(R, \sigma_{\text{s}}) \tag{3.1}$$

Step 2: 列出所有 n 个参量的量纲 (注意基本量纲最多只有 7 个), 如表 3.1 所示。

表 3.1　肥皂泡中的压强问题参量的量纲

ΔP	R	σ_{s}
$\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$	L	MT^{-2}

Step 3: 这个问题的基本量纲有 L, M, T 共 3 个。作为第一次猜测, 取 j 值等于问题中基本量纲的个数, 即 $j = 3$。这样就有 $k = n - j = 3 - 3 = 0$ 个无量纲量 Π。怎么会没有 Π? 一定是有什么不妥。由于 j 一定要小于 $n = 3$, 因此第二次取 $j = 2$, 这样就会有

$$k = n - j = 3 - 2 = 1 \tag{3.2}$$

意味着将有 1 个无量纲量 Π。

Step 4: 重复使用 j 个基本量纲, 用于构造每一个无量纲量 Π。

这个问题的重复参量个数 $j = 2$, 在这里取这两个重复参量为 R 和 σ_{s}, 因为 ΔP 是因变量, 故不作为重复参量。

Step 5: 把所得的所有 k 个无量纲量 Π 列出, 必要时适当将无量纲量 Π 转化为科学界已经命名的无量纲量。

把 ΔP 与重复参量做一个乘积, 但重复参量的幂次为待定

$$\Pi_1 = \Delta P R^a \sigma_{\text{s}}^b \tag{3.3}$$

把表中参量的基本量纲代入上式, 并注意 Π 是无量纲量, 得到

$$\begin{aligned}\dim \Pi_1 &= \mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{T}^0 = \dim(\Delta P R^a \sigma_\mathrm{s}^b) = \mathrm{M}\mathrm{L}^{-1}\mathrm{T}^{-2}\mathrm{L}^a(\mathrm{M}\mathrm{T}^{-2})^b \\ &= \mathrm{M}^{1+b}\mathrm{L}^{-1+a}\mathrm{T}^{-2-2b} = \mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{T}^0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

合并同类项, 两边同一量的幂次必须相等, 有

对于时间 $\mathrm{T}: 0 = -2 - 2b$, 得到 $b = -1$。

对于质量 $\mathrm{M}: 0 = 1 + b$, 得到 $b = -1$。

对于长度 $\mathrm{L}: 0 = -1 + a$, 得到 $a = 1$。

把确定的 a 和 b 代入 Π_1, 得到这个问题的 Π_1, 即

$$\Pi_1 = \frac{\Delta P R}{\sigma_\mathrm{s}} \tag{3.5}$$

Step 6: 验证所有的无量纲量 Π, 并写出问题的最终量纲关系。

这个问题只有 1 个 Π, 它不是其他 Π 的函数, 那只有一种可能, 一定是常数。科学界最喜欢常数和不变量

$$\Pi_1 = \frac{\Delta P R}{\sigma_\mathrm{s}} = C \tag{3.6}$$

得到压差

$$\Delta P = C\frac{\sigma_\mathrm{s}}{R} \tag{3.7}$$

讨论: 对于这个问题, 我们没有建立问题的方程, 更没有求解, 就得到了只有 1 个待定常数的压差公式, 多么神奇! 当然, 量纲分析不能完全确定全部待定常数, 它们必须通过其他方法 (如试验) 确定。对于这个问题, 常数 $C = 4$, 正确的解为

$$\Delta P = 4\frac{\sigma_\mathrm{s}}{R} \tag{3.8}$$

3.2 机翼的升力问题

当流体流经一个物体的表面时会对其产生一个表面力, 这个力在垂直于流体流向上的分力为升力, 与之相对的则是方向平行于流体流向的阻力。当流体是空气时, 它产生的升力叫做空气动力。航空器要想升到空中, 必须产生能克服自身重力的升力 (图 3.2)。

升力, 就是向上的力。从翼型流线谱中看出: 相对气流稳定而连续地流过翼型时, 上、下表面的流线情况不同。上表面流线是弯曲的, 其气流会产生负压, 因此压力小; 而下表面流线较平直, 其气流不会产生负压, 压力较大。因此产生了上下压力差。这个压力差就是空气动力, 它垂直于流速方向的分力就是升力 F_L。流过各个剖面的升力总和就是机翼的升力。升力维持飞机在空中飞行。

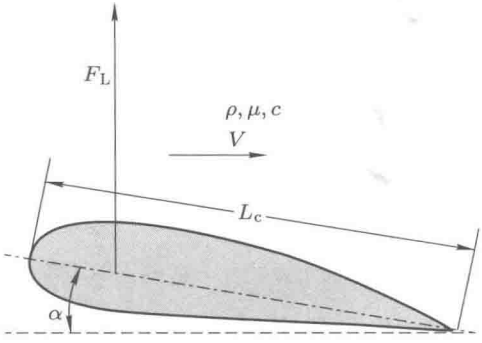

图 3.2 机翼的升力

升力取决于飞行的速度 V、空气的密度 ρ、空气的动力黏性系数 μ、空气的声速 c、机翼的特征尺寸 L_c, 以及物体与气流的夹角 (攻角 α)[8]。

Step 1: 列出问题所有的参量 (有量纲参量、无量纲参量和常数) 并计算其个数, 设一共有 n 个参量。

对于这个问题, 有 7 个参量, 即 $n = 7$。

问题是需要确定关系

$$F_L = f(V, L_c, \rho, \mu, c, \alpha) \tag{3.9}$$

Step 2: 列出所有 n 个参量的量纲, 如表 3.2 所示。

表 3.2 机翼升力问题参量的量纲

F_L	V	L_c	ρ	μ	c	α
MLT^{-2}	LT^{-1}	L	ML^{-3}	$ML^{-1}T^{-1}$	LT^{-1}	1

Step 3: 这个问题的基本量纲有 L, M, T 共 3 个。作为第一次猜测, 取 j 值等于问题中基本量纲的个数, 即 $j = 3$。这样就有 $k = n - j = 7 - 3 = 4$ 个无量纲量 Π。

Step 4: $j = 3$, 所以要从 7 个参量中选择 3 个作为问题的重复参量。无量纲的攻角不选, 因变量 F_L 不选, 动力黏性系数 μ 已经包含了所有的基本量纲 L, M, T 也不选, 故取 L_c, V, ρ 作为重复参量。

Step 5: 把所得的所有 k 个无量纲量 Π 列出, 必要时适当将无量纲量 Π 转化为科学界已经命名的无量纲量。

把 F_L 与重复参量做一个乘积, 但重复参量的幂次为待定, 有

$$\dim \Pi_1 = \dim(F_L V^a L_c^b \rho^c) \to \dim \Pi_1 = MLT^{-2}(LT^{-1})^a L^b (ML^{-3})^c \tag{3.10}$$

把表中参量的基本量纲代入上式, 并注意 Π 是无量纲量。合并同类项, 两边同一量的幂次必须相等, 得到待定常数 $a = -2, b = -2, c = -1$。

把确定的 a 和 b 代入 Π_1, 得到这个问题的 Π_1, 即

$$\Pi_1 = \frac{F_{\mathrm{L}}}{\rho V^2 L_{\mathrm{c}}^2} \tag{3.11}$$

其中, L_{c}^2 具有机翼的面积量纲, 可以用机翼面积 A 代替, Π_1 改写成传统的升力系数 C_{L}, 即

$$\Pi_{1,\mathrm{modified}} = \frac{F_{\mathrm{L}}}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} = C_{\mathrm{L}} \tag{3.12}$$

类似地, 我们用空气动力黏性系数 μ 代替 F_{L}, 就可以得到 Π_2

$$\dim \Pi_2 = \dim(\mu V^a L_{\mathrm{c}}^b \rho^c) \to \dim \Pi_2 = \mathrm{ML^{-1}T^{-1}(LT^{-1})^a L^b (ML^{-3})^c} \tag{3.13}$$

可以得到 $a=-1, b=-1, c=-1$, 所以

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V L_{\mathrm{c}}} \tag{3.14}$$

这个 Π_2 就是 Reynolds 数 Re 的倒数, 可以修改成传统表示

$$\Pi_{2,\mathrm{modified}} = \frac{\rho V L_{\mathrm{c}}}{\mu} = Re \tag{3.15}$$

同样可以得到第 3 个 Π_3, 就是飞行速度与当地声速的比值, 传统称为 Mach 数 $Ma = \Pi_3 = V/\mathrm{c}$

第 4 个 Π_4 就是攻角 α。

Step 6: 验证所有的无量纲量 Π, 并写出问题的最终量纲关系

$$\Pi_{1,\mathrm{modified}} = f(\Pi_{2,\mathrm{modified}}, \Pi_3, \Pi_4) \tag{3.16}$$

得到升力系数为

$$C_{\mathrm{L}} = \frac{F_{\mathrm{L}}}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} = f(Re, Ma, \alpha) \tag{3.17}$$

或得到升力

$$F_{\mathrm{L}} = \left(\frac{1}{2}\rho V^2 A\right) f(Re, Ma, \alpha) \tag{3.18}$$

讨论: 对于这个问题, 我们没有建立问题的方程, 更没有求解, 就得到了机翼升力系数与 Reynolds 数、Mach 数和攻角的关系式, 是不是很神奇? 当然, 量纲分析不能完全确定全部待定常数 $f(Re, Ma, \alpha)$, 必须通过其他方法 (如试验) 确定。

对于速度 V 很大的极限情况, 可认为 $Re \to \infty$ 和 $Ma \to \infty$, 这样 $f(Re, Ma, \alpha)$ 就只是攻角 α 的函数, 即

$$C_{\mathrm{L}}|_{V\to\infty} = \frac{F_{\mathrm{L}}}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} = f(\alpha) \tag{3.19}$$

这就是高超声速飞行器的 Newton 升力系数, 可以确定为 $C_{\mathrm{L}} = f(\alpha) = 2\sin^2\alpha$, 也称为牛顿正弦平方定律[10]。

现在经常说的一小时打遍全球的飞行器就是这种高超声速飞行器 (图 3.3), 超音速燃烧冲压发动机 (supersonic combustion ramjet, Scramjet) 与一般冲压发动机虽然都用在超音速飞行器上, 但其关键的差异在于一般冲压发动机的吸气在实际进入燃烧室之前, 需经过适当地导流, 减速到次音速, 但超音速燃烧冲压发动机的吸气仍可保持在超音速状态, 因此可达到更快的飞行速度。目前, 人类制造的飞行速度最快的吸气发动机飞行器 —— 美国国家航空航天局所开发的 X-43A 极音速无人试验机, 就是以超音速燃烧冲压发动机作为动力来源。它主要是通过产生的激波来获得升力。这种飞行器的原理主要是由现代力学奠基人 Prandtl 的学生 K. Oswatitsch[11] 提出的, 后来技术上由美国实现, 将对未来的军事形态产生巨大影响。

图 3.3 高超声速飞行器 Scramjet

3.3 管中的流动摩擦阻力问题

如图 3.4 所示, 设一根圆管的直径为 D, 不完全光滑, 粗糙度为 ε (具有长度量纲), 流体的密度为 ρ, 流动速度为 V, 动力黏性系数为 μ, 摩擦剪应力为 τ (摩擦阻力的来源), 问题是需要确定 τ 与其他量的关系[8]。

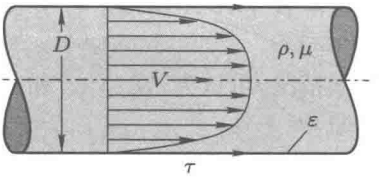

图 3.4 管中的流动摩擦阻力

Step 1: 列出问题所有的参量 (有量纲参量、无量纲参量和常数) 并计算其个数, 设一共有 n 个参量。

对于这个问题, 有 6 个参量, 即 $n=6$。

问题是需要确定关系

$$\tau = f(V, \varepsilon, \rho, \mu, D) \tag{3.20}$$

Step 2: 列出所有 n 个参量的量纲, 如表 3.3 所示。

表 3.3 管中的流动摩擦阻力问题参量的量纲

τ	V	ε	ρ	μ	D
$\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}$	$\mathrm{LT^{-1}}$	L	$\mathrm{ML^{-3}}$	$\mathrm{ML^{-1}T^{-1}}$	L

Step 3: 这个问题的基本量纲有 L、M、T 共 3 个。作为第一次猜测, 取 j 值等于问题中基本量纲的个数, 即 $j=3$。这样就有 $k=n-j=6-3=3$ 个无量纲量 Π。

Step 4: $j=3$, 所以要从 6 个参量中选择 3 个作为问题的重复参量。无量纲的攻角不选, 因变量 τ 不选, 动力黏性系数 μ 已经包含了所有的基本量纲 L、M、T 也不选, 故取 D、V、ρ 作为重复参量。

Step 5: 把所有的 k 个无量纲量 Π 列出, 必要时适当将无量纲量 Π 转化为科学界已经命名的无量纲量。

把 τ 与重复参量做一个乘积, 重复参量的幂次为待定

$$\dim \Pi_1 = \dim(\tau V^a D^b \rho^c) \rightarrow \dim \Pi_1 = \mathrm{ML^{-1}T^{-2}(LT^{-1})^a L^b (ML^{-3})^c} \tag{3.21}$$

把表中参量的基本量纲代入上式, 并注意 Π 是无量纲量, 合并同类项, 两边同一量的幂次必须相等, 得到待定常数 $a=-2, b=0, c=-1$。

把确定的 a 和 b 代入 Π_1, 得到这个问题的 Π_1, 即

$$\Pi_1 = \frac{\tau}{\rho V^2} \tag{3.22}$$

其中的 Π_1 改写为传统的 Darcy 摩擦系数 f_{D}, 即

$$\Pi_{1,\mathrm{modified}} = \frac{8\tau}{\rho V^2 A} = f_{\mathrm{D}} \tag{3.23}$$

类似地, 用空气动力黏性系数 μ 代替 τ, 重复计算就可以得到 Π_2

$$\dim \Pi_2 = \dim(\mu V^a D^b \rho^c) \rightarrow \dim \Pi_2 = \mathrm{ML^{-1}T^{-1}(LT^{-1})^a L^b (ML^{-3})^c} \tag{3.24}$$

可以得到 $a=-1, b=-1, c=-1$, 所以

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V D} \tag{3.25}$$

这个 Π_2 就是 Reynolds 数 Re 的倒数, 可以修改成传统表示

$$\Pi_{2,\text{modified}} = \frac{\rho V D}{\mu} = Re \tag{3.26}$$

同样可以得到第 3 个 Π_3, 就是粗糙度 ε 与管直径的比值, 传统称为粗糙度系数

$$\Pi_3 = \frac{\varepsilon}{D} \tag{3.27}$$

Step 6: 验证所有的无量纲量 Π, 并写出问题的最终量纲关系

$$\Pi_{1,\text{modified}} = f(\Pi_{2,\text{modified}}, \Pi_3) \tag{3.28}$$

得到摩擦系数为

$$f_{\mathrm{D}} = \frac{8\tau}{\rho V^2 A} = f\left(Re, \frac{\varepsilon}{D}\right) \tag{3.29}$$

讨论: 对于这个问题, 我们没有建立问题的方程, 更没有求解, 就得到了摩擦系数与粗糙度系数的关系公式。当然, 量纲分析不能完全确定全部待定常数 $f(Re, \varepsilon/D)$, 必须通过其他方法 (如试验) 确定。

对于粗糙度系数 ε/D 为零的管流, 在层流情况下, $f_{\mathrm{D}} = 64/Re$; 对于湍流是不同的结果, $f_{\mathrm{D}} = 0.316/Re^{1/4}$。

对于速度 V 很大的极限情况, 可认为 $Re \to \infty$, 这样 $f(Re, \varepsilon/D)$ 就只是粗糙度系数 ε/D 的函数。当管完全光滑时, 粗糙度系数为零, 即

$$f_{\mathrm{D}}|_{V\to\infty, \varepsilon/D\to 0} = f(0) = C \tag{3.30}$$

此时, 摩擦系数 f_{D} 是常数, 即剪应力

$$\tau = C\rho V^2 \tag{3.31}$$

其中, C 为常数。

3.4 Rayleigh 低速绕流换热问题

这是一个著名的量纲分析的例子[12], 曾引起过学术争论[6]。

假设流体没有黏性, 来流速度 V 比较小, 固体的特征长度为 l, 来流的流体相对于固体有温度差 θ, 流体的热容参数为 C, 流体的导热系数为 λ, 现在的问题是, 在单位时间内, 流体给于固体的热交换速率 H 有多大?

使用前述的 6 步法, 首先列出问题中 6 个参量的量纲 (温度量纲用 Θ 表示), 如表 3.4 所示。

表 3.4 Rayleigh 低速绕流换热问题参量的量纲

H	V	C	λ	θ	l
$\mathrm{ML^2T^{-3}}$	$\mathrm{LT^{-1}}$	$\mathrm{L^2MT^{-2}\Theta^{-1}}$	$\mathrm{LMT^{-3}\Theta^{-1}}$	Θ	L

这个问题共有 6 个参量, 4 个基本量纲 $\mathrm{M,T,L,\Theta}$, 根据 Π 定理, 这样就有两个独立的无量纲量 Π, 其中一个 $\Pi_1 = H/(\lambda l\theta)$ 包括 H, 另一个为由其他参量组成的无量纲量 $\Pi_2 = lVC/\lambda$, 这样可以得到问题的量纲关系

$$H = \lambda l\theta f\left(\frac{lVC}{\lambda}\right) \tag{3.32}$$

Rayleigh[12] 由此得出两个结论: ① 热交换速率 H 与温度差 θ 成正比; ② 速度 V 与流体的热容参数 C 不独立对热交换速率 H 起作用, 而是以乘积组合 VC 的形式起作用。

3.5 弹性线在拉紧状态下的振动频率问题

请使用量纲分析求弹性线在拉紧状态下的振动频率 ω。设弹性线的长度为 l, 单位长度的密度为 ρ, 线的拉力为 F, 这里不考虑抗弯刚度。首先列出 4 个参量的量纲, 如表 3.5 所示。

表 3.5 弹性线的振动频率问题参量的量纲

ω	l	ρ	F
$\mathrm{T^{-1}}$	L	$\mathrm{ML^{-1}}$	$\mathrm{MLT^{-2}}$

这个问题共有 4 个参量, 3 个基本量纲 M、T、L, 根据量纲分析的 Π 定理, 这样就有 1 个独立的无量纲量

$$\Pi = \omega l^a F^b \rho^c \tag{3.33}$$

把量纲代入, 有量纲关系

$$\dim \Pi = \mathrm{T^0M^0L^0} = \mathrm{T^{-1}L}^a(\mathrm{MLT^{-2}})^b(\mathrm{ML^{-1}})^c \tag{3.34}$$

根据量纲齐次定理, 有

$$-1-2b=0, \quad b+c=0, \quad a+b-c=0 \tag{3.35}$$

得到 $a=1, b=-1/2, c=1/2$, 所以频率为

$$\omega = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{F}{\rho}} \tag{3.36}$$

这个关系与严格理论及试验的结果是完全一致的。

3.6 单摆的振动周期问题

单摆固定一端, 自由端有一质量为 m 的集中质量, 摆的长度为 l, 不计摆的质量、变形和空气摩擦阻力, 初始方位角为 α, 单摆在重力作用下自由摆动, 求振动周期 T。

由于摆动是受重力作用, 所以除了以上参量外, 还必须考虑重力加速度g 的影响, 这样问题就有 5 个参量, 其量纲如表 3.6 所示。由于初始方位角 α 是无量纲量, 故可得 $\Pi_1 = \alpha$。其余只有 4 个有量纲的参量, 根据 Π 定理, 只能有 1 个 Π_2。这样就得到

$$\Pi_2 = Tl^a m^b g^c \tag{3.37}$$

表 3.6 单摆的振动周期问题参量的量纲

T	m	l	α	g
T	M	L	1	LT^{-2}

把量纲代入上式得到量纲关系

$$\dim \Pi_2 = \mathrm{TL}^a\mathrm{M}^b(\mathrm{LT}^{-2})^c \tag{3.38}$$

根据量纲齐次定理, 有

$$1 - 2c = 0, \quad a + c = 0, \quad b = 0 \tag{3.39}$$

得到 $a = -1/2, b = 0, c = 1/2$。这样就有

$$\Pi_2 = Tl^{-\frac{1}{2}} m^0 g^{\frac{1}{2}} = f(\Pi_1) = f(\alpha) \tag{3.40}$$

其中, $f(\alpha)$ 是初始方位角的函数。故可得

$$T = f(\alpha)\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{3.41}$$

讨论: 对于微小振动, $f(\alpha) \approx f(0) = 2\pi$。另外, 由周期表达式 (3.41) 可以看出, 摆动周期与集中质量 m 的大小没有关系, 只取决于摆的长度、初始方位角和重力加速度。

第四章
量纲分析的扩展

以上介绍的通常的量纲分析除了 2.6 节所述的难点外, 还有些先天不足, 例如, 长度和速度的方向无法表示, 这就使运用量纲分析处理一些固体力学问题时有一定的限制。在固体力学中, 量纲分析不很成功, 量纲分析需要改进, 需要引进定向量纲的概念[7,13-15]。

还有一些问题, 其中有的 Π 非常大而同时有些 Π 又非常小, 出现所谓的奇性问题。例如, 在以上的例子中曾看到 Re 很大的情况。这需要引进量纲分析的不完全相似概念。

4.1 定向量纲

通常的量纲分析存在一些不合理的地方:

(1) 由于角度是无量纲量, 它只能隐含在待定函数中, 它本身无法进行量纲分析, 例如研究机翼升力的攻角 α, 只能隐含在函数 $f(\alpha)$ 中, 但无法从中提取出来。

(2) 所有的应变都是无量纲量, 与角度类似, 其本身无法进行量纲分析, 只能隐含在待定函数中。弹性应变与塑性应变的量纲也一样, 无法区分开来。而固体力学中应变无处不在, 这可能是通常量纲分析在固体力学中应用不理想的一个

原因。

(3) 有些物理量本身之间没有什么联系, 但其量纲却相同, 在量纲分析中无法把它们分开。例如, 物质质量和惯性质量的量纲都是 M, 无法区分它们; 频率、应变率、角速度的量纲都是 T^{-1}; 所有弹性模量、剪切模量、应力的量纲都是 $L^{-1}MT^{-2}$; 角动量的变化率、能量和梁板壳弯矩的量纲都是 L^2MT^{-2}。

(4) 基本量纲最多只有 $j=7$ 个, 力学系统的基本量纲仅有 $j=3$ 个。对于力学系统来讲, 如果问题有 $n=4$ 个参量, 就可以得到 1 个 Π, 这种情况是最好的, 因为只有 1 个 Π, 它就只能是一个常数, 所有的量就不再隐含在函数中, 例如, 肥皂泡的例子中的 Π 就是一个常数。

这里就出现一个问题, 是不是可以在量纲分析的框架下, 通过合理增加一些基本量纲, 减少问题的 Π 的个数, 以便简化问题?

Huntley 提出定向量纲 (directed dimension) 的概念[13], Siano 提出取向分析 (orientational analysis) 的概念[14,15]。

具体地讲, Huntley 的定向量纲的基本思想有以下两点:

(1) 考虑矢量的大小和方向, 原来只考虑大小。如沿 x 方向的长度记为 L_x, 沿 x 方向的速度记为 $V_x = L_x/t$。

(2) 区分物质质量 (m_s) 和惯性质量 (m_i) 的量纲。

在 Siano 的取向分析中, 特别引进方向符号 l_x, l_y, l_z 代表 3 个方向, 没有方向的标量使用符号 l_0。这样, Huntley 的 L_x 就可以表达成 $L_x = Ll_x$。也可以表示角度和三角函数等。

4.1.1 炮弹的水平距离问题

炮弹在高为 H 处以初始速度 V 平抛, 求抛到地面的水平距离 R。炮弹在以速度 V 抛出后, 因地球引力 (重力) 的作用小而靠惯性飞行, 这个问题的参量有 H, V, R 和重力加速度 g, 即有 $n=4$ 个参量, 如表 4.1 所示。

表 4.1 炮弹的水平距离问题参量的基本量纲

H	V	R	g
L	LT^{-1}	L	LT^{-2}

由表 4.1 可以看出, 这个问题的基本量纲是 L 和 T, 即 $j=2$, 所以本问题有 $k=n-j=2$ 个无量纲量 Π

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= RV^{a_1}H^{b_1} = \frac{R}{H} \\ \Pi_2 &= gV^{a_2}H^{b_2} = \frac{gH}{V^2} \end{aligned} \tag{4.1}$$

所以有关系

$$\frac{R}{H} = f\left(\frac{gH}{V^2}\right) \tag{4.2}$$

这就是使用通常的量纲分析获得的结果。式 (4.2) 只能告诉我们水平距离 R 与初始高度 H 成正比, 无法给出其与初始速度的明确关系。我们不满足于这个结果, 希望获得更多的信息。

让我们区分速度的方向, 以及水平距离和高度方向。这样问题的参量有 H、V、R 和重力加速度 g, 即有 $n=4$ 个参量, 其量纲如表 4.2 所示。

表 4.2 炮弹的水平距离问题扩充参量的基本量纲

H	V	R	g
L_y	$\mathrm{L}_x\mathrm{T}^{-1}$	L_x	$\mathrm{L}_y\mathrm{T}^{-2}$

这样, 同一个问题仍然有 4 个参量, 但基本量纲多了, 现在是 3 个 (L_x, L_y, T), 这时就只有 1 个无量纲量 Π

$$\Pi = RV^aH^bg^c = \frac{R}{V}\sqrt{\frac{g}{H}} \tag{4.3}$$

由于式 (4.3) 只有 1 个 Π, 所以这个 Π 必须是常数 C, 问题的解答是

$$R = CV\sqrt{\frac{H}{g}} \tag{4.4}$$

讨论: 式 (4.4) 中只有一个待定常数, 物理关系非常简单, R 与 H 的关系是抛物线关系, 理论推导知道其中的常数 $C=2$。

4.1.2 弹性线的振动能量问题

一条长度为 l 的弹性线在拉紧的状态下沿垂直于线的方向做横向振动, 振幅为 A, 频率为 ω, 弹性线单位长度的质量为 ρ, 请用量纲分析求弹性线的振动动能 K。

这个问题按通常的量纲分析可以得到振动动能 $K=\omega^2\rho l^3 f(A/l)$, 函数 f 需待定。

可以利用扩展后的量纲方法, 通过区分方向性, 重新推导。显然, 如果弹性线的方向是 x 轴方向, 振动方向就是垂直的 y 方向, 横向振动方向也是 y 方向。因此, 5 个参量的量纲如表 4.3 所示。

表 4.3 弹性线的振动能量问题参量的量纲

K	ω	A	l	ρ
$\mathrm{ML}_y^2\mathrm{T}^{-2}$	T^{-1}	L_y	L_x	ML_x^{-1}

这样就增加了基本量纲的个数, 现在有 L_x, L_y, T, M, 即 $j=4$。所以只有 1 个 Π, 必然是常数 C, 从而有动能

$$K = C\omega^2\rho l A^2 \tag{4.5}$$

动能关系式 (4.5) 中只有一个待定常数, 其他参量都是以明确的幂次显示出来, 理论推导可以得到 $C = 1/2$。

4.1.3 弹性圆球的接触问题

设一弹性圆球和另一个大小相等、材料相同的弹性圆球接触, 球的半径为 R, 弹性模量为 E, 设接触的压力为 P, 求: ① 接触面积的半径 r; ② 两球互相压进而靠近的距离 δ。

这个问题用通常的量纲分析是无法得到任何结果的。现在用改进的量纲分析方法来求。由于轴对称性, 取轴向的长度量纲为 L_z, 垂直于轴向的长度量纲为 L_r。

这里要特别说明半径 R 和弹性模量 E 的量纲表示问题。对于接触问题, R 在这里只是表示接触点的曲率半径。根据曲率半径的定义, $1/R = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}s$, s 的量纲为 L_r, θ 的量纲为 $\mathrm{L}_z/\mathrm{L}_r$, 所以 R 的量纲为

$$\dim R = \mathrm{L}_r^2\mathrm{L}_z^{-1} \tag{4.6}$$

同样, 对于接触问题, 弹性模量 E 的本质是在接触点承受剪应力, 所以它具有在方向 L_z 的剪切模量的性质, 其作用面平行于 L_z, 于是 E 的量纲为

$$\dim E = \frac{\mathrm{ML}_z\mathrm{T}^{-2}}{\mathrm{L}_z\mathrm{L}_r} = \mathrm{ML}_r^{-1}\mathrm{T}^{-2} \tag{4.7}$$

问题 ① 有 4 个参量, 其量纲如表 4.4 所示。

表 4.4 弹性圆球的接触问题 ① 中参量的量纲

r	P	R	E
L_r	$\mathrm{ML}_z\mathrm{T}^{-2}$	$\mathrm{L}_r^2\mathrm{L}_z^{-1}$	$\mathrm{ML}_r{}^{-1}\mathrm{T}^{-2}$

问题 ① 有 4 个参量, 有 3 个重复参量 R, P, E, 这样只有 1 个 Π , 即

$$\dim \Pi = \dim(rR^\alpha P^\beta E^\gamma) = \mathrm{L}_r(\mathrm{L}_r^2\mathrm{L}_z^{-1})^\alpha(\mathrm{ML}_z\mathrm{T}^{-2})^\beta(\mathrm{ML}_r^{-1}\mathrm{T}^{-2})^\gamma \tag{4.8}$$

根据量纲齐次定理, 有

$$1 + 2\alpha - \gamma = 0, \quad -\alpha + \beta = 0, \quad \beta + \gamma = 0 \tag{4.9}$$

可以求出

$$\alpha = -\frac{1}{3}, \quad \beta = -\frac{1}{3}, \quad \gamma = \frac{1}{3} \tag{4.10}$$

于是有

$$\Pi = r\left(\frac{E}{PR}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{4.11}$$

由于只有 1 个 Π, 所以 Π 必须是一个常数, 因此得到球接触面积的半径为

$$r = c_1\left(\frac{PR}{E}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{4.12}$$

其中, c_1 为常数。

问题 ② 也有 4 个参量, 其量纲如表 4.5 所示。有 3 个重复参量 R, P, E, 这样只有 1 个 Π , 即

$$\dim \Pi = \dim(\delta R^{\alpha} P^{\beta} E^{\gamma}) = \mathrm{L}_z(\mathrm{L}_r^2\mathrm{L}_z^{-1})^{\alpha}(\mathrm{ML}_z\mathrm{T}^{-2})^{\beta}(\mathrm{ML}_r^{-1}\mathrm{T}^{-2})^{\gamma} \tag{4.13}$$

可以求出

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = -\frac{2}{3}, \quad \gamma = \frac{2}{3} \tag{4.14}$$

于是有

$$\Pi = \delta\left(\frac{RE^2}{P^2}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{4.15}$$

由于只有 1 个 Π, 所以 Π 必须是一个常数, 因此得到两球互相压进而靠近的距离为

$$\delta = c_2\left(\frac{P^2}{E^2R}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{4.16}$$

其中, c_2 为常数。

表 4.5 弹性圆球的接触问题 ② 中参量的量纲

δ	P	R	E
L_z	$\mathrm{ML}_z\mathrm{T}^{-2}$	$\mathrm{L}_r^2\mathrm{L}_z^{-1}$	$\mathrm{ML}_r^{-1}\mathrm{T}^{-2}$

4.2 量纲分析的不完全相似问题

以上讨论的量纲分析属于完全相似的情况, 如果其中的无量纲量 Π 趋于无穷大或零, 这时的量纲分析属于不完全相似情况, 这种情况的完全相似性一般将被破坏。为了可以近似处理这类问题的相似性, G. I. Barenblatt 在 1979 年[16] 提出了一种处理这类相似性的渐进方法。

为了不失一般性, 这里只举有 3 个 Π 的情况。如一个问题按正常操作得到无量纲关系

$$\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3) \tag{4.17}$$

假如在 $\Pi_2 \to 0$ 的情况下 Π_1 的极限存在, 现在的问题是 Π_1 可以表示成什么形式。类似使用函数的 Taylor 级数展开, Barenblatt 建议将式 (4.17) 改写为如下形式:

$$\Pi_1 = (\Pi_2)^{\alpha} f(\Pi_3) \tag{4.18}$$

其中, α 是待定常数。

如果 $\Pi_3 \to \infty$ 的极限也存在, 式 (4.18) 可以改写为

$$\Pi_1 = (\Pi_2)^{\alpha} f(\infty) \tag{4.19}$$

显然, 如果极限 $f(\infty)$ 存在, 则只能是一个常数。

利用这个思想, Barenblatt[16] 还重新处理了一些老问题, 如点源强爆炸和层流边界层的摩擦阻力等问题。

第五章
相似论

介绍量纲分析的目的除了是为了从宏观上把握问题中各参量的关系和处理、整理数据, 还有一个重要的目的就是在做模型试验时指导如何进行真实的比拟。例如, 一个物体很大, 不好做试验, 按尺寸等比例把它缩小, 就是几何变小了, 如果在这个物体上还有力的作用, 这时力如何变化才能与原来实际尺寸时的力学条件相似? 这就需要相似论的知识[7]。

5.1 相似论的基本概念

例如, 一个物体的长方形表面的两边分别为 a, b, 面积 $A = ab$ 上有垂直作用力 F, 表面的分布应力就是 $\sigma = F/A = F/(ab)$。如果两边长度同时变化 α 倍, 这样面积就变为 $A' = \alpha a \times \alpha b = \alpha^2 ab = \alpha^2 A$, 相应的应力变化为 $\sigma' = F/A' = F/(\alpha^2 A) = (1/\alpha^2)(F/A) = (1/\alpha^2)\sigma$。可以看出, 如果不改变力的比例, 得到的应力要变化 $1/\alpha^2$ 倍, 这样就不能完全模拟真实的应力情况, 所以在试验中要同时把模型中的力做相应的变化, 倍数是 $1/\alpha^2$, 即模型中的力应当是 $F' = F/\alpha^2$。从这个例子可以看出, 长度变化和面积的几何变化比例与应力和力的变化比例不同, 前者属于几何相似问题, 后者属于物理相似问题。因为它们之间必须满足一定的物理关系, 所以它们不能任意变化, 而需要相互协调, 满足一定的条件。

如果一个物理量 x 变化 c 倍成为 x', 即 $x' = cx$, 我们就说 x 与 x' 相似, c 为相似常数。例如, 加速度相似常数 $c_a = a'/a$, 力相似常数 $c_F = F'/F$, 质量相似常数 $c_m = m'/m$, 这样对于两个力学系统, 都满足牛顿第二定律, 即

$$F = ma \tag{5.1}$$

$$F' = m'a' \tag{5.2}$$

式 (5.2) 就变为

$$\frac{c_F}{c_m c_a} F = ma \tag{5.3}$$

由于物理公式的形式在任何变换后都必须保持不变, 所以系数

$$c = \frac{c_F}{c_m c_a} = 1 \tag{5.4}$$

考虑时间相似常数 $c_t = t'/t$, 速度相似常数 $c_v = v'/v$, 所以加速度相似常数为

$$c_a = \frac{c_v}{c_t} \tag{5.5}$$

这样就有相似条件

$$c = \frac{c_F c_t}{c_m c_v} = 1 \tag{5.6}$$

$c = c_F c_t/(c_m c_v)$ 就是相似数。相似数为 1 是一般性的, 这样就有相似论第一定律。

定律 5.1 (相似论第一定律) *不同物理系统相似的条件是相似数等于 1。*

这个定律首先由 Newton 在他的《自然哲学的数学原理》中提出。

式 (5.6) 可以改写为

$$\frac{F't'}{m'v'} = \frac{Ft}{mv} = k = \text{常数} \tag{5.7}$$

其中, k 称为相似模数, 也称为 Newton 模数 Ne。上式表明, 两个系统相似的条件是相关的相似模数相等, 这是第一定律的另外一种表述。

这里的相似模数 k 显然是个无量纲量, 其实就是量纲分析中的 Π, 但在量纲分析时没有考虑问题的物理方程, 所以它是不唯一的。在相似论中通过物理方程来选择 Π, 因此, 相似模数是适合物理方程要求的 Π。

第一定律还不能保证物理相似, 需要进一步制约。

定律 5.2 (相似论第二定律) *物体物理相似的条件是所有的 Π_i 和相似模数都要相等。*

如果一个系统有多个 Π, 要想得到问题的试验结果, 必须让它们完全相等。但有时让它们完全相等很难做到, 这时就必须具体问题具体分析, 简化或首先满足首要相似条件, 即合理的相似条件的松弛也是允许的。

有时多个 Π 要完全相等在技术上不容易做到, 例如 Reynolds 数 Re, 其定义为

$$Re = \frac{\rho L V}{\mu} \tag{5.8}$$

其中, L 为特征长度, V 为特征速度, μ 为动力黏性系数, ρ 为空气的密度。

Reynolds 数 Re 是研究流场的一个重要特征数。当使用缩小尺寸的飞机模型在风洞中试验时, 必须保证与实际飞机在空气中飞行有着相似的流动, 也就是说, 它们必须有相同的几何形状和相同的 Reynolds 数。由于在管内流场中的 Reynolds 数与流体密度、速度和管直径的乘积成正比, 与流体黏性系数成反比。所以, 如果希望获得高的 Reynolds 数, 在尺寸不能放大的情况下, 可行的办法显然是提高速度, 或增大密度, 或减小黏性系数。高 Reynolds 数对于超高声速飞行器的研发非常重要。Max M. Munk 提出了可变密度的风洞[17] 的概念, 并在美国 Langley 实验室建造了世界第一个可变密度的风洞, 为航空器的发展做出了巨大的贡献。

5.2 弹性梁的挠度

设有一个弹性梁, 长度为 l, 抗弯刚度为 D, 梁的挠度为 $w(x)$, 梁上的分布荷载为 $q(x)$, 坐标 x 与梁轴重叠。弹性梁小变形的方程为

$$D\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} = q(x) \tag{5.9}$$

两端固定的边界条件为

$$\begin{aligned} x = -\frac{l}{2} : w = 0, \quad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = 0 \\ x = \frac{l}{2} : w = 0, \quad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = 0 \end{aligned} \tag{5.10}$$

如果用相似常数的方法, 设有另外一个梁的 q', w', x', D' 与式 (5.9) 相似, 满足方程

$$D'\frac{\mathrm{d}^4 w'}{\mathrm{d}x'^4} = q'(x) \tag{5.11}$$

其中, $q' = c_q q, w' = c_w w, x' = c_x x, D' = c_D D$, 这样式 (5.11) 可改写为

$$\frac{c_D c_w}{c_x^4 c_q} D\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} = q(x) \tag{5.12}$$

其中, 相似数 $c = c_D c_w/(c_x^4 c_q)$, 根据相似论第一定律, 有

$$c = \frac{c_D c_w}{c_x^4 c_q} = 1, \quad \frac{Dw}{l^4 q} = k \tag{5.13}$$

其中, k 为相似模数, 即这个问题的 Π。

如果取梁中心 $(x=0)$ 处的挠度为 w_0, 平均分布荷载为 q_0, 并引入无量纲参量

$$Q=\frac{q}{q_0},\quad W=\frac{w}{W_0},\quad X=\frac{x}{l} \tag{5.14}$$

式 (5.9) 可以改写为

$$\frac{Dw_0}{l^4q_0}D\frac{\mathrm{d}^4W}{\mathrm{d}X^4}=Q(X) \tag{5.15}$$

两端固定的边界条件相应变为

$$\begin{aligned} X=-\frac{1}{2}:W=0,\quad \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}X}=0 \\ X=\frac{1}{2}:W=0,\quad \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}X}=0 \end{aligned} \tag{5.16}$$

其中, $k_1=Dw_0/(l^4q_0)$ 就是这种情况下的相似模数。这样式 (5.15) 的解就是

$$\frac{Dw_0}{l^4q_0}W(X)=f(X) \tag{5.17}$$

或写为

$$W(X)=\frac{l^4q_0}{Dw_0}f(X) \tag{5.18}$$

这个解虽然还没有最终确定 $f(X)$ 的具体形式, 但已经可以看出重要信息, 即 $W(X)$ 的形状只与 $f(X)$ 有关, 而与荷载 q 的大小无关。从而得到

$$w(x)=w_0W\left(\frac{x}{l}\right)=\frac{l^4q_0}{Dw_0}f\left(\frac{x}{l}\right) \tag{5.19}$$

特别要指出, 弹性梁问题的相似模数在不同的荷载和边界条件情况下是不同的, 例如, 当梁没有分布荷载作用, 只在梁端有弯矩作用时, $q=0$。显然, 以上的 k_1 已经不能使用, 这时的相似模数可以通过在梁端的弯矩条件确定, 可得相似模数 $k_2=Dw_0/(l^2M)$, 其中 M 为一端边界上的外加弯矩, 可见相似模数的确可以反应梁的荷载和边界条件情况。

5.3 相似变量

相似论除了可以协助模型试验, 确定不同情况下的相似模数, 也可以为变量找到进行变换的关系, 如用量纲分析点源强爆炸时, 已经可以将双坐标 R,t 转化成一个相似变量 ξ。这里介绍一个重要的流体边界层的例子。

1904 年, 德国科学家 Prandtl 在其著名论文[18] 中首次注意到大 Reynolds 数时黏性的重要性, 并提出了边界层概念。在此之前都不考虑流体黏性, 所以那时的流体力学基本是数学的一部分, 不能解决工程问题, 与应用实际没有什么关系。

边界层提出后, 情况发生了巨大变化, 推动了流体力学的大发展, 所以 Prandtl 也被公认为近代力学之父。

Prandtl 利用量级分析, 把二维流体力学的 Navier-Stokes 方程组进行了较大的简化, 对不考虑时间效应的定常流动, 简化后的方程组为[19]

$$\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}&=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}&=0 \end{aligned} \tag{5.20}$$

边界条件为

$$\begin{aligned} y=0:\ u=v=0 \\ y=\infty:\ u=u_0 \end{aligned} \tag{5.21}$$

其中, u,v 分别为流体速度在 x,y 方向上的分量, u_0 为来流速度。这是个非线性偏微分方程组, 也不易求解。Prandtl 的学生 Blasius 非常巧妙地引入相似变量, 把以上方程组进行了简化[19]。

这个问题一共有两个自变量 x,y, 两个因变量 u,v, 把它们同时进行相似变换

$$U=\frac{u}{u_0},\quad V=\frac{v}{v_0},\quad \xi=\frac{x}{x_0},\quad \eta=\frac{y}{y_0} \tag{5.22}$$

这样式 (5.20) 改写为

$$\begin{aligned} U\frac{\partial U}{\partial \xi}+\frac{v_0x_0}{u_0y_0}V\frac{\partial U}{\partial \eta}&=\frac{\mu x_0}{u_0y_0^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial U}{\partial \xi}+\frac{v_0x_0}{u_0y_0}\frac{\partial V}{\partial \eta}&=0 \end{aligned} \tag{5.23}$$

可以看出, 变换后的方程组中有两个相似数, 按照相似论, 它们应当等于 1。又有历史原因, 我们采用 Blasius 的做法, 把常数 μ 吸收进来, 相似数为 1 的条件改写为

$$\frac{v_0x_0}{u_0y_0}=1,\quad \mu\frac{x_0}{u_0y_0^2}=1 \tag{5.24}$$

式 (5.23) 变为

$$\begin{aligned} U\frac{\partial U}{\partial \xi}+V\frac{\partial U}{\partial \eta}&=\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial U}{\partial \xi}+\frac{\partial V}{\partial \eta}&=0 \end{aligned} \tag{5.25}$$

由式 (5.24) 可知, u_0, v_0,x_0, y_0 中只有两个是独立的, 如果选择 u_0 和 x_0, 就可以得到 $y_0=(\mu x_0/u_0)^{1/2}$, $v_0=\mu/y_0$, 这样就有关系

$$\alpha=\frac{\eta}{\xi^{\frac{1}{2}}}=y\left(\frac{u_0}{\mu x}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.26}$$

所以, 原来是变量 x, y 的偏微分方程组 [式 (5.20)], 就变成 ξ, η 的偏微分方程组 [式 (5.23)], 引入函数 $\varphi = \varphi(\alpha)$, 利用式 (5.26) 并引入 $U = 2\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}\alpha, V = \alpha\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}\alpha - \varphi$ 后, 式 (5.25) 就变换为一个变量 α 的常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^3\varphi}{\mathrm{d}\alpha^3} + \varphi\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\alpha^2} = 0 \tag{5.27}$$

相应的边界条件变为

$$\begin{aligned} \alpha = 0 : \varphi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\alpha} = 0 \\ \alpha = \infty : \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{5.28}$$

非线性方程式 (5.27) 的级数解以及相应的数值结果都已经由 Blasius 获得, 具体结果可以参考 Blasius 的博士论文[19]。

如果你有机会阅读 100 多年前 Blasius 的博士论文, 再与之后的所有流体力学书籍对比, 你会发现这个问题的描述和求解完全出自 Blasius 的博士论文, 至今未变。后来的所有边界层问题的摩擦阻力计算都以此为基础, 可见这个方程的重要性。

第六章
量纲分析和相似论的应用

基础知识只有通过反复实践才能达到熟能生巧的境界。由于量纲分析的基础性和普适性, 它的应用范围可以说涉及全部科学技术领域, 甚至经济金融领域。如果能掌握好这门 "手艺", 你会感到能力非常强大, 对问题规律性的把握就会上一个层次。下面让我们一起通过实例来感受量纲分析的普适性及其强大的功能。

6.1 破甲弹金属射流的稳定性问题

破甲弹是以具有内衬金属罩空腔的聚能装药爆炸后形成的高速金属射流来摧毁坦克等装甲目标的, 在第二次世界大战期间得到广泛应用, 主要用于反坦克武器。破甲弹射流侵彻的理论研究始于第二次世界大战期间, 最具代表性的射流侵彻理论是由 G. I. Taylor 于 20 世纪 40 年代建立的不可压流体理论[20]。Taylor 等巧妙地利用不可压流体力学中的 Bernoulli 方程, 建立了射流侵彻深度与射流长度之比和射流与靶板密度之比之间简明而重要的关系, 成为了第二次世界大战后期及战后 20~30 年破甲弹设计的主要理论依据。但是, Taylor 的流体理论存在明显的局限性。该理论指出侵彻深度主要取决于材料的密度, 如果射流和靶板密度相同, 理论预测的侵彻深度应该与射流长度相等。第二次世界大战以后, 装甲材料的研究取得了很大进展, 高强度金属、陶瓷等材料的研制成功和应用大

大增强了装甲防御破甲弹的能力, 材料强度也起着重要的作用, “矛” 与 “盾” 的关系发生了显著变化。于是, 人们对侵彻机理有了一些新的思考, 试图探索除密度之外其他可能的影响因素。

郑哲敏在工程科学领域有许多的贡献[21], 他[22,23] 及其领导的爆炸力学研究团队与相关单位合作, 通过理论分析、模型与现场试验研究, 系统地建立了破甲弹射流侵彻的流体弹塑性理论, 阐明了破甲过程的机理, 建立了定量、可靠和实用的计算公式。郑哲敏在破甲机理方面的研究成果丰富, 主要工作包括: ① 射流侵彻的模型律; ② 准定常射流侵彻的线性律; ③ 准定常射流侵彻阶段侵彻速度与射流速度的关系; ④ 射流稳定性的控制机理。

对于射流稳定性的控制机理, 根据 Taylor 的准定常射流侵彻理论, 聚能射流侵彻深度近似等于射流的长度。大量试验表明, 在破甲弹形成的高速金属射流飞行过程中, 不同的部位发生颈缩失稳, 继而被拉断, 原来连续完整的射流拉断成许多小段。颈缩特别是拉断后的射流严重丧失侵彻能力。因此, 研究聚能射流颈缩失稳和拉断的规律, 揭示这一现象的影响因素和背后控制的物理机制尤为重要。

实际上, 聚能射流失稳过程十分复杂, 涉及的因素除了射流的强度、惯性之外, 在高速段还有外界空气动力影响。聚能射流速度呈现头部大、尾部小的特征, 飞行中处于拉伸变形状态。如果射流表面压力分布存在的扰动使射流的某个横截面有所减小, 那么它将继续减小直至拉断, 这是高速段射流失稳断裂的一个基本原因。对于低速段的拉断失稳, 郑哲敏巧妙地引入表征射流初始直径和速度梯度 (应变率) 组合影响的面积冲量 Ω, 通过量纲分析, 得到了射流颈缩与拉断的位置和时间表达。

由试验观测, 可以假设在初始时刻有直径为常数 d_0 的一个沿长度方向上速度呈线性分布的射流, 即速度梯度为常数, 初始的拉应变为 $\dot{\varepsilon}_0$ (就是速度梯度), 材料密度为 ρ, 材料的屈服极限为 Y, 材料的断面收缩率定义为 $\psi = 1 - A_\mathrm{b}/A_0$, 其中, A_0 为材料变形的初始横截面面积, A_b 为断口处的横截面面积, 是一个无量纲量。由于射流的头部速度比尾部快, 这样的速度梯度必然使射流不断拉伸变细, 直至发生断裂, 问题是要确定断裂时射流的直径 d_b。

这个问题有 6 个参量, 所以断裂时射流的直径 d_b 应当可以用其他参量表示, 即

$$d_\mathrm{b} = f(d_0, \dot{\varepsilon}_0, \rho, Y, \psi) \tag{6.1}$$

郑哲敏[23] 指出, 实际 d_0 与 $\dot{\varepsilon}_0$ 之间并不相互独立。射流在拉长的过程中, 各微元都保持等速运动, 射流内压力不高, 可以认为密度 ρ 为常数, 所以射流速度相差 $\mathrm{d}u_j$ 的那端微元在运动过程中满足 Lagrange 质量守恒关系, 即有

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u_j} = \pi\rho\left(\frac{d}{2}\right)^2 \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}u_j} = \text{常数} \tag{6.2}$$

其中, d 为该微元的直径, $\mathrm{d}m$ 和 $\mathrm{d}l$ 为其质量和长度, $\mathrm{d}l/\mathrm{d}u_j$ 刚好为应变的倒数

$1/\dot{\varepsilon}_0$。所以, 式 (6.2) 可以写为

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u_j}=\pi\rho\left(\frac{d}{2}\right)^2\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}u_j}=\pi\rho\frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2}{\dot{\varepsilon}_0}=\pi\rho\frac{\left(\frac{d_0}{2}\right)^2}{\dot{\varepsilon}_0}=\frac{\pi}{4}\rho\frac{d_0^2}{\dot{\varepsilon}_0}=\text{常数} \tag{6.3}$$

可见, d_0 和 $\dot{\varepsilon}_0$ 通过组合 $d_0^2/\dot{\varepsilon}_0$ 发挥作用, 引入一个新的物理参量 $\varOmega$

$$\varOmega=\frac{d_0^2}{\dot{\varepsilon}_0} \tag{6.4}$$

于是, 断裂时射流的直径 d_b 表达式 (6.1) 减少一个参量, 变为

$$d_\mathrm{b}=f(\varOmega,\rho,Y,\psi) \tag{6.5}$$

为了进行量纲分析, 下面列出各参量的量纲, 如表 6.1 所示。有 5 个参量, 3 个基本量纲, 故有两个 $\varPi$, 其中一个是 $\varPi_1=\psi$, 另一个是

$$\varPi_2=d_\mathrm{b}\varOmega^a\rho^bY^c \tag{6.6}$$

表 6.1 破甲弹金属射流的稳定性问题参量的量纲

Y	$\varOmega$	ρ	ψ	d_b
$\mathrm{L^{-1}MT^{-2}}$	$\mathrm{L^2T}$	$\mathrm{ML^{-3}}$	1	L

把量纲代入得到

$$\dim\varPi_2=\mathrm{L^0M^0T^0}=\mathrm{L(L^2T)}^a(\mathrm{ML^{-3}})^b(\mathrm{L^{-1}MT^{-2}})^c=\mathrm{L}^{1+2a-3b-c}\mathrm{M}^{b+c}\mathrm{T}^{a-2c} \tag{6.7}$$

根据量纲齐次定理, 可以得到

$$1+2a-3b-c=0,\quad b+c=0,\quad a-2c=0 \tag{6.8}$$

解得

$$a=-\frac{1}{3},\quad b=\frac{1}{6},\quad c=-\frac{1}{6} \tag{6.9}$$

所以

$$\varPi_2=d_\mathrm{b}\varOmega^{-\frac{1}{3}}\rho^{\frac{1}{6}}Y^{-\frac{1}{6}} \tag{6.10}$$

根据 $\varPi$ 定理, 有问题的量纲关系 $\varPi_2=f(\varPi_1)$, 即得到断裂时射流的直径 d_b 的表达式

$$d_\mathrm{b}=f_1(\psi)\left(\varOmega\sqrt{\frac{Y}{\rho}}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{6.11}$$

后来注意到 $\varOmega$ 的量纲为 $\mathrm{L^2T}$, 因此称为面积冲量。

同样分析, 可以得到断裂时间 t_b 的表达式

$$t_b = f_2(\psi)\left(\Omega\frac{\rho}{Y}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{6.12}$$

Crady[24] 研究过同样的问题, 只是不考虑断面收缩率 $\psi = 1 - A_b/A_0$ 的影响, 他利用他人的分析数据得到的关系是

$$t_b = \frac{1}{2}\left(\Omega\frac{\rho}{Y}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{6.13}$$

这个结果完全没有待定系数, 形式与郑哲敏[23] 的结果基本一致, 不过, 郑哲敏公式 (6.11) 的系数需要由材料的断面收缩率来确定。

应当指出, 式 (6.12) 中的 $f_2(\psi)$ 的具体表达式至今还没有确定。对于是否需要考虑断面收缩率 $\psi=1-A_b/A_0$ 的影响, 有以上两个主要的观点, 目前还不能确定哪一个表达式更能反映问题的本质, 只是从实际应用上看, Crady 的表达式系数已经完全确定, 可以直接使用。不过, 具体应该如何处理还需要做试验确定。

不过, 从断面收缩率的定义看, $\psi = 1 - A_b/A_0$, 假设射流的横截面是圆形的 (非圆形也类似), 初始横截面面积 A_0 和断口处的横截面面积 A_b 可以表达为

$$A_0 = \pi\left(\frac{d_0}{2}\right)^2, \quad A_b = \pi\left(\frac{d_b}{2}\right)^2 \tag{6.14}$$

所以, 断面收缩率与断口直径的关系是

$$\psi = 1 - \frac{A_b}{A_0} = 1 - \left(\frac{d_b}{d_0}\right)^2 \tag{6.15}$$

由这一关系可以看出, ψ, d_0, d_b 只有两个参量是独立的, 所以在考虑 d_0, d_b 时, 断面收缩率 ψ 不是独立的参量, 所以式 (6.1) 需要修改。

由于在有 d_0, d_b 的情况下, 断面收缩率 ψ 不是独立的参量, 这样断裂时射流的直径 d_b 可以表示为

$$d_b = f_1(\Omega, \rho, Y) \tag{6.16}$$

断裂时间 t_b 可以表示为

$$t_b = f_2(\Omega, \rho, Y) \tag{6.17}$$

这两个表达式分别只有 4 个参量, 3 个基本量纲, 所以只能分别组合成 1 个 Π, 由 Π 定理可知, 这个 Π 只能是一个常数。所以, 得到修改后的断裂时射流的直径 d_b 的表达式

$$d_b = c_1\left(\Omega\sqrt{\frac{Y}{\rho}}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{6.18}$$

和断裂时间 t_b 的表达式

$$t_b = c_2\left(\Omega\frac{\rho}{Y}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{6.19}$$

其中, c_1, c_2 为常数, 它们不再是断面收缩率 ψ 的函数。由 Crady 的研究可以确定 $c_2 = 1/2$。这里给出的 t_b 与 Crady 的完全相同。

把式 (6.18) 代入式 (6.15), 得到断面收缩率

$$\psi = 1 - \left(\frac{c_1}{d_0}\right)^2 \left(\Omega\sqrt{\frac{Y}{\rho}}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{6.20}$$

改进后的式 (6.18)、式(6.19) 和式 (6.20) 由孙博华[25] 导出。

这里的工作小结如下: ① 澄清了断面收缩率 ψ 不是独立参量, 它与射流的拉应变有关系, $\psi = 1 - (c_1/d_0)^2 \left(\Omega\sqrt{Y/\rho}\right)^{2/3}$; ② 获得了考虑面积冲量 Ω 的断裂时射流的直径 $d_\mathrm{b} = c_1 \left(\Omega\sqrt{Y/\rho}\right)^{1/3}$; ③ 断裂时间 $t_\mathrm{b} = (1/2)\left(\Omega\rho/Y\right)^{1/3}$。

6.2 薄板在高速射流冲击下的撕裂问题

假设薄板抵抗变形的参量是屈服极限 Y, 在初始时刻, 有一直径为 d_0、射流密度为 ρ 的细长金属射流, 以非常高的速度 v_0 冲击与其运动方向垂直的薄板, 显然, 薄板将被撕裂甚至击穿, 求撕裂厚度 d_b 和发生断裂的时间 t_b。

破甲弹的聚能射流从端部到尾部速度不等且逐步递减, 这个速度梯度使射流逐渐拉长变细, 最终导致断裂。金属薄板受到弹丸超高速冲击后形成鼓包, 鼓包在速度梯度作用下不断变薄撑大, 最终导致断裂和破碎, 变成碎片云。

Crady[24] 对这个问题进行了量纲分析, 谈庆明[26] 采用郑哲敏[23] 对射流低速段的稳定问题进行量纲分析的思想, 也对薄板撕裂问题进行了量纲分析, 得到了相关的撕裂厚度 d_b 和发生断裂的时间 t_b。但他们的结果稍微有些差别, 这里分别介绍。

先介绍 Crady 的量纲分析结果。对于撕裂厚度问题有 5 个参量 $Y, d_0, \rho, v_0, d_\mathrm{b}$, 分别列出它们的量纲, 如表 6.2 所示。

表 6.2 薄板撕裂厚度问题参量的量纲

Y	d_0	ρ	v_0	d_b
$\mathrm{L^{-1}MT^{-2}}$	L	$\mathrm{ML^{-3}}$	$\mathrm{LT^{-1}}$	L

对于发生断裂的时间问题也有 5 个参量 Y, d_0, ρ, v_0, t_b, 分别列出它们的量纲, 如表 6.3 所示。

表 6.3 薄板发生断裂的时间问题参量的量纲

Y	d_0	ρ	v_0	t_b
$\mathrm{L^{-1}MT^{-2}}$	L	$\mathrm{ML^{-3}}$	$\mathrm{LT^{-1}}$	T

这两个问题都有 $n=5$ 个参量, 3 个基本量纲 M, T, L, 取 d_0, ρ, Y 为基本物理量, 可知这两个问题都有两个独立的无量纲量 Π。

对于撕裂厚度问题, 有两个 Π

$$\Pi_1 = d_\mathrm{b} d_0^a \rho^b Y^c = \frac{d_\mathrm{b}}{d_0}, \quad \Pi_2 = v_0 d_0^a \rho^b Y^c = v_0\sqrt{\frac{\rho}{Y}} \tag{6.21}$$

利用量纲分析的 Π 定理, 有关系 $\Pi_1 = f_1(\Pi_2)$, 即可得到撕裂厚度

$$d_\mathrm{b} = d_0 f_1(J) \tag{6.22}$$

其中, $J = v_0^2\rho/Y$ 为 (动态)破坏数, 郑哲敏在 1965 年研究流体的弹塑性体模型时就曾使用过这个数。它表征动压与强度之比, 或惯性与强度之比。

对于发生断裂的时间问题, 用同样方法可以得到

$$t_\mathrm{b} = d_0\sqrt{\frac{\rho}{Y}} f_2(J) \tag{6.23}$$

谈庆明[26-28] 采用郑哲敏[23] 在处理射流稳定性的思想, 对这个问题进行了量纲分析, 所不同的是在几何方面不再是一维的单向拉伸, 而是二维薄板的双向拉伸。谈庆明采用郑哲敏提出的断面收缩率 ψ_p, 并重新定义了二维的 Ω_p, 即

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u_j \mathrm{d}u_j} = \rho d_0 \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}u_j}\right)^2 = \rho\frac{d_0}{\dot{\varepsilon}_0^2} = \text{常数} \tag{6.24}$$

其中, d_0 为薄板的厚度, $\mathrm{d}l$ 为两个方向的长度, $\mathrm{d}m$ 为微元的质量。

引入新的参量 Ω_p, 即

$$\Omega_\mathrm{p} = \frac{d_0}{\dot{\varepsilon}_0^2} \tag{6.25}$$

这样引入的 Ω_p 与郑哲敏所引入的面积冲量 Ω 的量纲是不同的, 这里的 Ω_p 的量纲为 LT^2 (表 6.4), 不是面积冲量。

表 6.4 薄板撕裂问题参量的量纲

Y	Ω_p	ρ	ψ_p	d_b	t_b
$\mathrm{L^{-1}MT^{-2}}$	$\mathrm{LT^2}$	$\mathrm{ML^{-3}}$	L	L	T

这样, 撕裂厚度 d_b 可以表达为

$$d_\mathrm{b} = f(\Omega_\mathrm{p}, \rho, Y, \psi_\mathrm{p}) \tag{6.26}$$

发生断裂的时间 t_b 可以表达为

$$t_\mathrm{b} = f(\Omega_\mathrm{p}, \rho, Y, \psi_\mathrm{p}) \tag{6.27}$$

利用量纲分析可以得到撕裂厚度 d_{b} 的表达式

$$d_{\mathrm{b}} = f(\psi_{\mathrm{p}}) \left(\Omega_{\mathrm{p}} \frac{Y}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}} \tag{6.28}$$

和断裂时间 t_{b} 的表达式

$$t_{\mathrm{b}} = g(\psi_{\mathrm{p}}) \left(\Omega_{\mathrm{p}} \sqrt{\frac{\rho}{Y}} \right)^{\frac{1}{3}} \tag{6.29}$$

其中, $f(\psi_{\mathrm{p}}), g(\psi_{\mathrm{p}})$ 为断面收缩率 ψ_{p} 的函数。

显然, 谈庆明 [式 (6.28)、式 (6.29)] 的结果与 Crady [式 (6.22)、式 (6.23)] 的结果不同, 究竟哪个正确, 需要试验验证。

类似上一节对断面收缩率 ψ 的讨论, 可以看出, 对于薄板来讲, 初始厚度为 d_0, 撕裂时的厚度为 d_{b}, 所以这里的断面收缩率 ψ_{p} 的定义应该为

$$\psi_{\mathrm{p}} = 1 - \frac{d_{\mathrm{b}}}{d_0} \tag{6.30}$$

显然, $d_0, d_{\mathrm{b}}, \psi_{\mathrm{p}}$ 不是完全独立的, 由于 Ω_{p} 中已经包含了 d_0, 所以完全可以把 ψ_{p} 从表达式中去掉, 从而得到薄板发生撕裂时的厚度 d_{b} 的表达式

$$d_{\mathrm{b}} = c_1 \left(\Omega_{\mathrm{p}} \frac{Y}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}} \tag{6.31}$$

和断裂时间 t_{b} 的表达式

$$t_{\mathrm{b}} = c_2 \left(\Omega_{\mathrm{p}} \sqrt{\frac{\rho}{Y}} \right)^{\frac{1}{3}} \tag{6.32}$$

其中, c_1, c_2 为常数。

这样也可以得到断面收缩率

$$\psi_{\mathrm{p}} = 1 - \frac{d_{\mathrm{b}}}{d_0} = 1 - \frac{c_1}{d_0} \left(\Omega_{\mathrm{p}} \frac{Y}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}} \tag{6.33}$$

从量纲分析的角度, 在谈庆明[26] 的基础上改进的表达式 [式 (6.31)、式 (6.32)] 比 Crady 的表达式 [式 (6.22)、式 (6.23)] 要简单, 因为其中没有任何待定函数, 只有一个常数。同时, 这里的公式比 Crady 的公式优越, 因为是显式表达, 没有待定函数。另外, Crady 的公式不能确定断面收缩率 ψ, 而我们的可以确定。

改进后的式 (6.31)、式 (6.32) 和式 (6.33) 由孙博华导出[29]。

这里的工作小结如下: ① 澄清了断面收缩率 ψ 不是独立参量, 它与薄板的拉应变有关系, $\psi_{\mathrm{p}} = 1 - d_{\mathrm{b}}/d_0 = 1 - (c_1/d_0)\left(\Omega_{\mathrm{p}} Y/\rho\right)^{1/3}$; ② 获得了考虑参量 Ω_{p} 的撕裂厚度 $d_{\mathrm{b}} = c_1 \left(\Omega_{\mathrm{p}} Y/\rho\right)^{1/3}$; ③ 断裂时间 $t_{\mathrm{b}} = c_2 \left(\Omega_{\mathrm{p}} \sqrt{\rho/Y}\right)^{1/3}$。

6.3 固体的断裂问题

作为一门学科, 断裂力学在第一次世界大战期间为英国航空工程师 Griffith 所创立, 用于解释脆性材料的断裂。他面临的问题是, 从理论上说, 小裂纹尖部的应力接近无穷大。也就是说, 无论裂纹有多小, 负载有多轻, 材料都会失效。为了逃出困境, 他发展出一套热力学方法。他假定裂纹的扩展需要创造表面能, 这一能量是由变形能提供的。如果变形能的损失足以提供新的表面能, 裂纹就开始扩展。决定材料是否发生断裂不能只看拉应力或剪应力是否超过材料的强度, 试验证实, 表征材料断裂的是另一个指标 —— 断裂韧性 K_c, 其量纲为 $L^{-1/2}MT^{-2}$。

郑哲敏曾对工程问题系统使用量纲分析方法并取得非常重要的成果, 这里介绍郑哲敏[30] 对经典弹塑性力学进行的量纲分析结果。他指出, 断裂韧性 K_c 不能从经典弹塑性力学的弹性常数 E, ν 和屈服极限 σ_s 导出, 而 E 和 σ_s 的量纲与断裂韧性 K_c 的量纲相差一个比例 $L^{1/2}$。这是一个非常精彩的量纲分析实例, 下面做简单介绍。

设有一个长度为 l 的裂纹, 受到拉应力 σ_0 的作用, 材料的弹性模量为 E, 泊松比为 ν。问题是拉应力 σ_0 逐渐增加到多大时, 裂纹开始扩展。

根据问题的表述, 拉应力 σ_0 必须是其他参量的函数, 即

$$\sigma_0 = f(E, \nu, l) \tag{6.34}$$

为了利用量纲分析, 列出这 4 个参量的量纲, 如表 6.5 所示。

由于 ν 是无量纲量, σ_0, E, l 之间只能组成 1 个 Π, 即

$$\Pi = \sigma_0 E^a l^b \tag{6.35}$$

由量纲分析的齐次定理, 可得 $a = -1, b = 0$, 所以有

$$\frac{\sigma_0}{E} = f(\nu) \tag{6.36}$$

这个结果没有包括裂纹的初始长度, 就是说使裂纹扩展的拉应力与初始裂纹长度无关, 这显然与实际不符, 必须修改, 但如何修改?

表 6.5 固体的断裂问题参量的量纲

σ_0	E	ν	l
$L^{-1}MT^{-2}$	$L^{-1}MT^{-2}$	1	L

郑哲敏[30] 认为, 既然长度量纲不能在经典理论中考虑进来, 修改经典理论的方向就一定是考虑某种包含长度量纲的新物理量。从断裂的物理现象看, 随着拉应力的逐渐提高, 弹塑性变形能也逐渐提高, 并且弹塑性变形能逐渐转换成表面张力 γ, 表面张力 γ 的提高开始驱动裂纹扩展。所以, 断裂问题必须考虑表面张力 γ, 其量纲是 MT^{-2}。

这样, 问题的表达就改为

$$\sigma_0 = f(E, \nu, l, \gamma) \tag{6.37}$$

这个表达式也可以改写为有过弹性变形能的形式

$$\frac{\sigma_0^2}{E} = f(\nu, l, \gamma) \tag{6.38}$$

可以取 l, γ 为基本物理量, 得到无量纲关系

$$\frac{\sigma_0^2}{E}\frac{l}{\gamma} = f(\nu) \quad 或 \quad \sigma_0^2 l = E\gamma f(\nu) \equiv C_{\mathrm{G}} \tag{6.39}$$

其中, C_{G} 是由材料的 E, ν, γ 决定的常数。由式 (6.39) 可得

$$\sigma_0 = l^{-\frac{1}{2}}\sqrt{C_{\mathrm{G}}} \tag{6.40}$$

表明裂纹扩展的应力 σ_0 与 $\sqrt{l}$ 成反比, 这是与试验相符的。

由经典弹性力学可以得到这个问题的应力强度因子 $K_{\mathrm{I}} = (\pi l)^{1/2}\sigma_0$, 这样就有裂纹扩展的条件: 应力强度因子达到临界值 K_{Ic}, 这里的 K_{Ic} 称为断裂韧性。显然有关系

$$K_{\mathrm{Ic}} = (\pi C_{\mathrm{G}})^{\frac{1}{2}} \tag{6.41}$$

由经典弹性力学可得裂纹扩展 $\mathrm{d}l$ 所释放的弹性能, 即 $K_{\mathrm{Ic}}^2(1-\nu^2)\mathrm{d}l/E$, 这一弹性能将转化为表面能 $2\gamma\mathrm{d}l$, 即有关系

$$\frac{K_{\mathrm{Ic}}^2(1-\nu^2)\mathrm{d}l}{E} = 2\gamma\mathrm{d}l \quad 或 \quad \pi C_{\mathrm{G}}(1-\nu^2) = 2E\gamma \tag{6.42}$$

这样就得到

$$C_{\mathrm{G}} = \frac{2E\gamma}{\pi(1-\nu^2)}, \quad f(\nu) = \frac{2}{\pi(1-\nu^2)} \tag{6.43}$$

从而可以得到裂纹开始扩展时的应力值为

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi(1-\nu^2)l}} \tag{6.44}$$

有关断裂力学的标度律可参考赵亚溥的综述性文章[31]。

6.4 航天器液体推进剂的晃动问题

自从 1957 年 10 月 4 日苏联发射世界上第一个航天器 —— “人造地球卫星一号” 以来, 航天器经历了由简单到复杂的发展过程, 航天器动力学也经历了由低级到高级的发展过程。由于有效载荷的增加和任务寿命的提高, 现代航天器通

常携带着大量的液体推进剂, 液体推进剂质量可达到运载火箭总质量的 90% 以上、卫星或探测器总质量的 50% 以上。因此液体对航天器的动力学特性有着十分重要的影响。一方面, 大量液体推进剂的晃动会对航天器产生较大的干扰力和力矩, 一旦超过控制系统可调节或结构所能承受的上限, 将造成控制系统不稳定或结构破坏。1998 年, 美国国家航空航天局发射的近地小行星会合 (Near Earth Asteroid Rendezvous, NEAR) 航天器在执行近地小行星探测任务时, 由于卫星姿态与液体晃动之间的耦合导致一个推进系统失效, 使任务延迟了 13 个月。

另一方面, 液体推进剂与贮箱壳体的液固耦合作用会大大降低航天器结构的振动频率。当火箭的纵向振动频率与推进反馈系统频率发生耦合时, 将产生纵向耦合振动, 对运载火箭中的人员和仪器产生不利影响; 当火箭的横向振动频率与推进剂贮箱内液体的晃动频率相接近时, 二者有可能发生耦合作用而对火箭飞行的稳定性产生影响[32]。

航天器液体推进剂的晃动问题类似一个封闭桶中有未充满的液体, 即有自由表面。这样航天器的结构整体运动就会对其中的液体产生相互作用, 使液体产生晃动, 我们的问题是求晃动力 F。

这个问题包含以下参量: 推进剂燃料桶的几何尺寸 (直径为 R, 全或半高为 H)、液体的高度 h、液体密度 ρ、液体动力黏性系数 μ、表面张力 γ、有效加速度g_{e}、燃料桶运动的振幅 A、燃料桶结构振动频率ω 和晃动力 F。

显然, 问题有 10 个参量, 3 个基本量纲 L, M, T, 所以可以产生 7 个 Π。物理上, 这个问题包括 5 个方面的力, 它们分别是: 黏性力、重力、惯性力、表面张力和晃动力。问题的本质就是这些力之间的动态平衡问题。

晃动力 F 应当可以表示成其他参量的函数, 即

$$F = f(R, H, h, A, \rho, \mu, \gamma, g_{\mathrm{e}}, \omega) \tag{6.45}$$

为了使用量纲分析, 这 10 个参量的量纲如表 6.6 所示。

表 6.6 液体推进剂的晃动问题参量的量纲

R	H	h	ρ	μ	γ	g_{e}	A	ω	F
L	L	L	$\mathrm{ML^{-3}}$	$\mathrm{ML^{-1}T^{-1}}$	$\mathrm{MT^{-2}}$	$\mathrm{LT^{-2}}$	L	$\mathrm{T^{-1}}$	$\mathrm{MLT^{-2}}$

首先在几何方面对式 (6.45) 进行无量纲简化, 得到

$$F = f\left(\frac{H}{R}, \frac{h}{R}, \frac{A}{R}, \rho, \mu, \gamma, g_{\mathrm{e}}, \omega\right) \tag{6.46}$$

这 5 个方面的力 (黏性力、重力、惯性力、表面张力和晃动力) 产生 4 个 Π, 即

$$\frac{F}{\rho g_{\mathrm{e}} R^2 A} = f\left(\frac{H}{R}, \frac{h}{R}, \frac{A}{R}, \frac{\rho g_{\mathrm{e}} R^3}{\mu^2}, \frac{\rho g_{\mathrm{e}} R^2}{\gamma}, \omega\sqrt{\frac{R}{g_{\mathrm{e}}}}\right) \tag{6.47}$$

这里的组合参量可以与已知的无量纲量联系起来。Galileo 数 $Ga=\rho^2 g_e R^3/\mu^2$ 代表重力与黏性力之比, Bond 数 $Bo=\rho g_e R^2/\gamma$ 代表重力与表面张力之比, Froude 数 $Fr=\omega\sqrt{R/g_e}$ 代表惯性力与重力之比。

所以, 表达式也可以改写为

$$\frac{F}{\rho g_e R^2 A}=f\left(\frac{H}{R},\frac{h}{R},\frac{A}{R},Ga,Bo,Fr\right) \tag{6.48}$$

这个关系是由 Abramson 和 Ransleben 于 1960 年得到的[33]。

在航天器的不同飞行阶段, Bo, Fr 和 Ga 这 3 个 Π 会起到不同的作用, 应该可以分为 3 个阶段, 每一个阶段由其中的一个 Π 控制。

在发射阶段, 由于火箭发动机的巨大推力, 有效加速度比较大, 这一阶段 Fr 起主要作用, 所以表达式可以简化为

$$\frac{F}{\rho g_e R^2 A}\propto Fr^{\alpha}=\left(\omega\sqrt{\frac{R}{g_e}}\right)^{\alpha} \tag{6.49}$$

其中, α 为待定常数。所以, 晃动力为

$$F\propto \rho g_e R^2 A Fr^{\alpha}=\rho g_e R^2 A\left(\omega\sqrt{\frac{R}{g_e}}\right)^{\alpha} \tag{6.50}$$

入轨前的有效加速度较小, 这一阶段 Ga 起主要作用, 晃动力为

$$F\propto \rho g_e R^2 A Ga^{\beta}=\rho g_e R^2 A\left(\frac{\rho^2 g_e R^3}{\mu^2}\right)^{\beta} \tag{6.51}$$

其中, β 为待定常数。当航天器在轨时, 有效加速度 g_e 非常小, Bo 就比较重要, 这时有晃动力

$$F\propto \rho g_e R^2 A Bo^{\lambda}=\rho g_e R^2 A\left(\frac{\rho g_e R^2}{\gamma}\right)^{\lambda} \tag{6.52}$$

其中, 幂次 α,β,λ 需要试验确定。

不管这些幂次是多少, 从以上的晃动力的简化结果看, 航天器的燃料桶的直径 R 是一个核心参数。如果需要降低晃动力 F, 一个较优化的方案是减少航天器燃料桶的直径。就是说航天器的燃料桶最好设计成细长形, 或者把燃料桶内部设计成许多的细长形的小桶, 并排在一起形成燃料桶系统, 这样既可以保证航天器有足够大的燃料桶, 同时还可以降低晃动力, 提高航天器的运动稳定性[34]。

6.5 海面原油泄漏的扩展问题

海面原油泄漏后, 由于重力的原因, 油面的扩散面积会逐渐变大, 油层变薄; 同时, 表面张力会试图阻止其继续扩散; 一旦油面开始扩散, 还会带动其下密度

较大的海水运动, 惯性与海水黏性也起作用。我们的问题是: 假设海面平静, 求油面直径扩展的时间规律。

设原油泄漏体积为 V, 油面扩散直径为 D, 油面厚度为 h, 海水密度为 ρ, 海水运动黏性系数 $\nu = \mu/\rho$, 油与海水间的表面张力为 σ, 海水与油的密度差 $\Delta\rho = \rho - \rho_0$, 其中 ρ_0 为油的密度, 重力加速度为 g, 扩散开始后的时间为 t。该问题参量的量纲如表 6.7 所示。

表 6.7 海面原油泄漏的扩展问题参量的量纲

D	V	h	ρ	ν	σ	$\Delta\rho$	g	t
L	L^3	L	ML^{-3}	L^2T^{-1}	MT^{-2}	ML^{-3}	LT^{-2}	T

由于假设海面平静, 所以油面扩散不间断, 油面扩散直径 D 不是时间t 的间断函数, 而是连续函数。显然, 油面扩散直径 D 可以表示为其他参量的函数关系

$$D = f(V, h, \rho, \nu, \sigma, \Delta\rho, g, t) \tag{6.53}$$

这个问题有 9 个参量, 但是, 因为一般原油泄漏体积 V 已知, 所以相应的特征长度可取为 $L = V^{\frac{1}{3}}$。所以, 式 (6.53) 可以改写为

$$D = f(V, V^{\frac{1}{3}}, \rho, \nu, \sigma, \Delta\rho, g, t) = f(V, \rho, \nu, \sigma, \Delta\rho, g, t) \tag{6.54}$$

这样就减少 1 个参量, 变成 8 个参量。由于基本量纲为 3 个, 所以可以产生 5 个 Π, 它们分别是

$$\begin{gathered} \Pi_1 = \frac{D}{V^{\frac{1}{3}}}, \quad \Pi_2 = \frac{\rho V^{\frac{1}{3}}}{\Delta\rho g t^2} \\ \Pi_3 = \frac{g\Delta\rho}{\rho}\sqrt{\frac{t^3}{\nu}}, \quad \Pi_4 = \frac{\rho V^{\frac{2}{3}}}{\sigma}\sqrt{\frac{\nu}{t^3}}, \quad \Pi_5 = \frac{\Delta\rho}{\rho} \end{gathered} \tag{6.55}$$

由量纲分析的 Π 定理, 可得问题的无量纲关系式 $\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5)$, 即

$$\frac{D}{V^{\frac{1}{3}}} = f\left(\frac{\rho V^{\frac{1}{3}}}{\Delta\rho g t^2}, \frac{g\Delta\rho}{\rho}\sqrt{\frac{t^3}{\nu}}, \frac{\rho V^{\frac{2}{3}}}{\sigma}\sqrt{\frac{\nu}{t^3}}, \frac{\Delta\rho}{\rho}\right) \tag{6.56}$$

这个关系由 Fay 于 1969 年导出[35]。

式 (6.56) 中 Π 可以与一些有名的无量纲量联系起来。Π_2 就是 Froude 数 Fr, 表示惯性力与重力之比; Π_3 就是 Galileo 数 Ga, 表示重力与黏性力之比; Π_4 就是 Ohnesorge 数 Oh, 表示黏性力与表面张力之比。所以, 式 (6.56) 可以改写为

$$D = V^{\frac{1}{3}} f\left(Fr, Ga, Oh, \frac{\Delta\rho}{\rho}\right) \tag{6.57}$$

Fay[35] 的一个重要贡献是, 他认识到海面原油泄漏的扩散过程分为 3 个阶段, 每一个阶段由其中的一个 Π 控制, 有不同的时间标度律。

扩散开始阶段, 油面厚度较大, 重力比表面张力作用强, 重力是主导因素, 与之抗衡的黏性力还没有来得及发展, 最主要的扩散驱动因素是由重力引起的油面加速扩散, 所以, 这一阶段, Fr 起主要作用, 其他 Π 的影响可以忽略, 有油面直径

$$D \propto V^{\frac{1}{3}} f\left(Fr, \frac{\Delta\rho}{\rho}\right) \propto V^{\frac{1}{3}}(Fr)^{\alpha} = V^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\rho V^{\frac{1}{3}}}{\Delta\rho g t^2}\right)^{\alpha} \tag{6.58}$$

这里的 α 仅与 $\Delta\rho/\rho$ 有关。Fay 通过模型试验得到 $\alpha = -1/4$, 这样就得到开始扩散阶段的直径 D 的时间标度律是

$$D \propto \left(gV\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{2}} \tag{6.59}$$

这个阶段之后的第二阶段, 重力仍然是主导因素, 但第二阶段油面扩展加速度 $\ddot{D} \propto -t^{-3/2}$ 逐渐减小并趋于 0, 此时黏性力起主要作用, 所以 Ga 起主要作用, 其他 Π 的影响可以忽略, 有第二阶段油面直径

$$D \propto V^{\frac{1}{3}} f\left(Ga, \frac{\Delta\rho}{\rho}\right) \propto V^{\frac{1}{3}}(Ga)^{\beta} = V^{\frac{1}{3}}\left[\frac{g\Delta\rho}{\rho}\sqrt{\frac{t^3}{\nu}}\right]^{\beta} \tag{6.60}$$

Fay 通过模型试验得到 $\beta = 1/6$, 这样就得到扩散第二阶段的直径 D 的时间标度律是

$$D \propto \left(\frac{g}{\sqrt{\nu}}\frac{\Delta\rho}{\rho}V^2\right)^{\frac{1}{6}} t^{\frac{1}{4}} \tag{6.61}$$

最后阶段, 油面厚度非常薄, 重力已经不重要, 表面张力是扩散的主导因素, 它与黏性力平衡, 这个阶段 Oh 起主要作用。Fay 得到最后阶段的直径 D 的时间标度律是

$$D \propto \left(\frac{\sigma}{\rho\sqrt{\nu}}\right)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{3}{4}} \tag{6.62}$$

从以上表达式可以看出, 第一和第二阶段, 原油泄漏体积 V 起作用, 但到最后阶段, 因为油层非常薄, 扩散与体积 V 无关。

6.6 风吹声问题

气流中有小尺度物体 (尺度与相关的波长比很小) 就会发出风吹声。这种现象的本质是因为 Kármán 涡街。

在流体中安置一个物体, 在特定条件下会出现不稳定的边界层分离, 物体下游的两侧会产生两道非对称排列的旋涡, 其中一侧的旋涡按顺时针方向转动, 另一旋涡则反方向旋转, 这两排旋涡相互交错排列, 各个旋涡和对面两个旋涡的中间点对齐, 如街道两边的街灯般。这种现象因 Theodore von Kármán 最先从理论上阐明而得名, 故称为 Kármán 涡街。

这里的问题是: 设小物体的特征长度如圆柱的直径为 D, 气体密度为 ρ, 气体动力黏性系数为 μ, 来流速度为 U, 求小物体的振动频率 f。

这个问题有 5 个参量, 它们的量纲如表 6.8 所示。

表 6.8 风吹声问题参量的量纲

f	D	μ	ρ	U
T^{-1}	L	$L^{-1}MT^{-1}$	ML^{-3}	LT^{-1}

频率 f 可以写为其他参量的函数

$$f = \varphi(U, D, \mu, \rho) \tag{6.63}$$

为与频率 f 区别, 这里把量纲函数写为 φ。

这个问题一共有 5 个参量, 3 个基本量纲, 可以得到两个 Π。取 U, D, ρ 为基本物理量, 利用量纲分析, 可以得到两个 Π, 即

$$\Pi_1 = \frac{fD}{U}, \quad \Pi_2 = \frac{\mu}{\rho U D} \tag{6.64}$$

Π_1 是 Strouhal 数 Sr, Π_2 是 Reynolds 数 Re 的倒数。所以, 物体的风吹声频率可以表达为 $\Pi_1 = \varphi(\Pi_2)$, 即

$$Sr = \varphi\left(\frac{1}{Re}\right), \quad 即 \quad f = \frac{U}{D}\varphi\left(\frac{1}{Re}\right) \tag{6.65}$$

从流体力学可以确定待定函数 $\varphi(1/Re) = 0.195\ 1(1 - 1/5Re)$, 所以有小物体的风吹声频率为

$$f = 0.195\ 1\left(1 - \frac{1}{5Re}\right)\frac{U}{D} \tag{6.66}$$

由频率表达式可以看出, 频率 f 与风速 U 成正比, 与特征长度 D 成反比, 即风速越高, 频率越高, 或物体越小, 频率越高。

在风吹声中的气体流动速度一般不能太高, 都是平稳层流与物体相互作用面发声的气流。速度高时就会有湍流, 情况就不同了, 这将在湍流噪声中介绍。

6.7 不可压各向同性湍流的标度律

物质一般有固态、气态、液态和等离子态, 一般情况下流动的问题都相对复杂。我们的经验是, 当水速比较快时, 流动就从稳定的层流开始有摆动, 速度再快就进入完全紊乱的状态, 这个状态就是这里说的湍流。湍流是流体的一种流动状态, 此时流体没有质变。

500 多年前, 文艺复兴时期的大师 L. da Vinci 就已经注意到湍流现象并称为 turbolenza 湍流, 之后好长时间对湍流都没有特别的研究成果, 直到 1830 年

Osborne Reynolds 在做圆管内流动试验时发现, 当 $\rho LV/\mu$ 达到一个值时, 流动就紊乱, 称为湍流, 由于这个无量纲量非常重要, 后来由 George Gabriel Stokes 在 1851 年命名为 Reynolds 数, 记为 Re, 它是流体力学中第一有名的参量, 所有的黏性流动现象都与它有关。

Reynolds 数较小时, 黏性力对流场的影响大于惯性力, 流场中流速的扰动会因黏性力而衰减, 流体流动稳定, 为层流; 反之, 若 Reynolds 数较大时, 惯性力对流场的影响大于黏性力, 流体流动较不稳定, 流速的微小变化容易发展、增强, 形成紊乱、不规则的湍流流场。

有效地描述湍流的性质至今仍然是物理学中的一个重大难题, 所以被认为是经典物理学最难的问题之一。

由于湍流无时无地不在, 不得不时刻面对, 没有办法。虽然人类对湍流还没有完全的把握, 但经过百年来的努力, 对湍流已有了一定的了解。1904 年, Prandtl 在其著名论文[18] 中首次注意到大 Reynolds 数时黏性的重要性, 并提出了边界层概念。1922 年, L. F. Richardson[36] 发现湍流有各种尺度的涡 (eddy), 能量从大涡向较小的涡传递, 最后被耗散成热 (图 6.1)。1930 年左右, 英国 G. I. Taylor 提出各向同性湍流的统计理论。

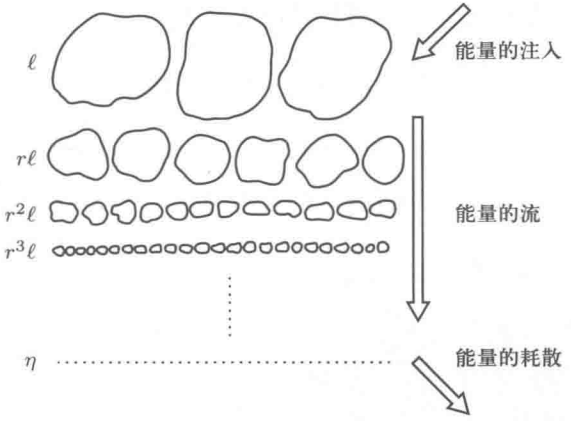

图 6.1 湍流的串级

1941 年, 苏联 A. N. Kolmogorov 发表了有关湍流的著名论文[37,38], 提出了能量谱的标度律 (图 6.2), 这个理论可以描述湍流能量如何从大涡向小涡传递, 具体尺度的涡含有多少能量, 以及每一尺度的涡耗散的能量大小。Kolmogorov 理论可以说是 Richardson 猜想的量化。Kolmogorov 假设在惯性子区 (inertial subrange), 能谱 $E(k)$ 只与波数 k 和耗散率 ε 有关, 即

$$E(k) = f(k, \varepsilon) \tag{6.67}$$

如果不继续就没有惊喜了, 这个惊喜是由量纲分析实现的。

这个问题的参量量纲如表 6.9 所示, 参量个数 $n=3$, 基本量纲为 L 和 T, 就是说 $j=2$, 根据 Π 定理, 可以构造 1 个 Π。由于能谱 $E(k)$ 是因变量, k, ε 为重复参量, 从而有

$$\Pi = E(k)\varepsilon^{\alpha}k^{\beta} \tag{6.68}$$

量纲关系为

$$\dim \Pi = (\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-2})(\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-3})^{\alpha}(\mathrm{L}^{-1})^{\beta} \tag{6.69}$$

得幂次关系等式

$$-2-3\alpha=0, \quad 3+2\alpha-\beta=0$$

可得 $\alpha=-2/3, \beta=5/3$, 这样就有 $\Pi = E(k)\varepsilon^{-2/3}k^{5/3}$。

表 6.9 不可压各向同性湍流问题参量的量纲

$E(k)$	k	ε
$\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-2}$	L^{-1}	$\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-3}$

由于这里只有 1 个 Π, 它就不可能是任何参量的函数, 所以这个 Π 必须是一个普适常数, 记为 C_{K}。这样能谱就可以表达为

$$\Pi = E(k)\varepsilon^{-2/3}k^{5/3} = C_{\mathrm{K}} \tag{6.70}$$

或者

$$E(k) = C_{\mathrm{K}}\varepsilon^{2/3}k^{-5/3} \tag{6.71}$$

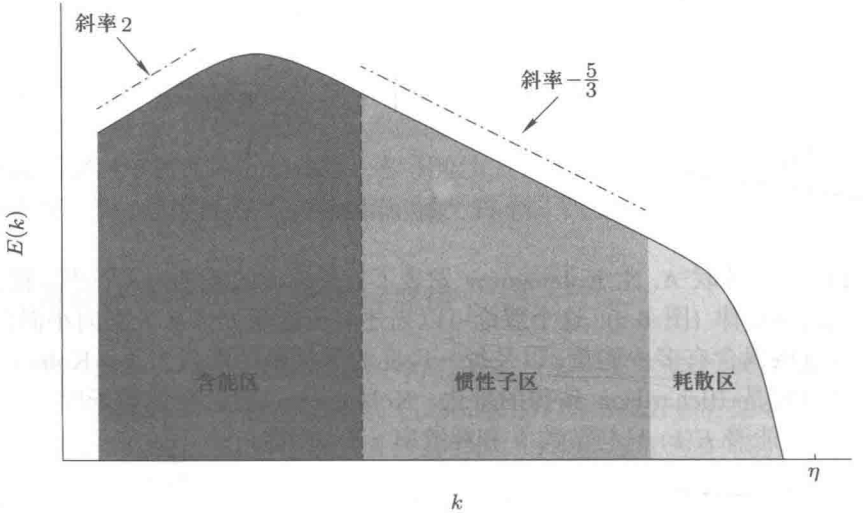

图 6.2 湍流的 Kolmogorov –5/3 标度律

这个看似简单的公式非常重要，可能是人们对湍流研究的最高成果之一，称为 Kolmogorov –5/3 标度律，普适常数 $C_{\mathrm{K}} = 1.5$。Kolmogorov –5/3 标度律常用来验证一个模型和计算方法的准确性。它好像是一个边界，任何湍流模式在不可压各向同性的情况下都应当服从 Kolmogorov –5/3 标度律。

6.8 可压缩湍流的能谱标度律初探

可压缩湍流广泛存在于各种工程应用和自然现象中，如超声速飞行器、受控热核反应、高温燃烧流动、星系的形成和演化等。近年来，大 Mach 数可压缩湍流的流动机理是湍流研究的一个热点。在之前的研究成果基础上，参考文献 [39] 通过高精度数值模拟，研究了可压缩湍流的能量流动机理，将传统的不可压湍流能量级串理论推广到了可压缩湍流中，论证了可压缩湍流的能谱具有 Kolmogorov –5/3 标度律。研究结果表明，可压缩湍流场的剪切模态和胀压模态分别具有各自的能量级串行为；胀压模态的能量级串过程要远远快于剪切模态的能量级串过程。从而剪切模态的能量在较小尺度上占主导地位，并且具有类似不可压湍流的 Kolmogorov –5/3 标度律能谱。此外，参考文献 [39] 还分析了可压缩湍流场中的激波结构对流场能谱和能量流动的影响。数值模拟和理论分析表明，在大尺度胀压力驱动下，可压缩湍流场中会出现大尺度激波结构，导致胀压部分的能谱具有 –2 标度律。通过条件平均发现，大尺度应力张量和亚格子应变张量在激波区域具有反向平行的关系，而且动能的局部亚格子流动与局部张量的平方呈线性关系，从而定量地揭示了激波对能量流动的促进作用。由于激波的存在，绝大部分动能从大尺度传向小尺度，并且能量级串过程具有很强的尺度相似性。

Kadomtsev 和 Petviashvili[40] 认为，由于各种激波方向的随机性，可以把湍流看作各向同性的，采用 Burgers 给出的湍流能谱

$$E(k) \propto \varepsilon c^{-1} k^{-2} \tag{6.72}$$

其中，c 为声速，ε 为耗散率。

Moiseev 等[41] 使用群不变方法，给出湍流能谱

$$E(k) \propto \rho c^{\frac{2}{3\gamma-1}} \varepsilon^{\frac{2\gamma}{3\gamma-1}} k^{-\frac{5\gamma-1}{3\gamma-1}} \tag{6.73}$$

其中，ρ 为流体密度，γ 为流体的绝热指数。

Shivamoggi[42] 指出，式 (6.73) 不正确，需要修改，并提出一个新的湍流能谱

$$E(k) \propto \rho^{\frac{\gamma-1}{3\gamma-1}} c^{\frac{2}{3\gamma-1}} \varepsilon^{\frac{2\gamma}{3\gamma-1}} k^{-\frac{5\gamma-1}{3\gamma-1}} \tag{6.74}$$

不过，以上的湍流能谱都有一定的问题。因为公式中应该包括密度比 ρ_0/ρ 和速度比 $v/c = Ma$ 的项，但这些公式中都没有，所以需要进一步研究。

当 Ma 接近 1 时[39], 确认三维可压缩湍流的密度加权能量谱表现出 Kolmogorov $-5/3$ 标度律。

6.8.1 对应速度场 u 的可压缩湍流能谱

可压缩与不可压的本质区别就在于密度的可变性, 不可压情况下流体密度是不变的, 所以研究可压缩湍流必须引入参量密度 ρ。这时, 可压缩湍流就涉及以下几个参量: 波数 k, ε, ρ, 能谱 $E(k)$, 运动黏性系数 ν, 初始密度 ρ_0。它们的量纲如表 6.10 所示。

表 6.10 可压缩湍流问题参量的量纲 (一)

E	ν	ε	k	ρ	ρ_0
L^3T^{-2}	L^2T^{-1}	L^2T^{-3}	L^{-1}	ML^{-3}	ML^{-3}

可以得到 $\Pi_1 = E\varepsilon^{-3/2}k^{5/3}$, $\Pi_2 = \nu\varepsilon^{-1/3}k^{4/3}$, $\Pi_3 = \rho_0\rho^{-1}$, 根据 Π 定理有关系 $\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3)$, 即

$$E(k, \rho_0\rho^{-1}) = \varepsilon^{\frac{2}{3}}k^{-\frac{5}{3}}F[(k\eta)^{\frac{4}{3}}, \rho_0\rho^{-1}] \tag{6.75}$$

其中, Kolmogorov 长度 $\eta = (\varepsilon^3/\nu)^{1/4}$, 耗散率 $\varepsilon = 2\nu\overline{s_{ij}s_{ij}}$, $s_{ij} = (1/2)(u'_{i,j}+u'_{j,i})^2$, u'_i 为流速脉动分量, $u'_{i,j} = \partial u'_i/\partial x_j$。

如果我们使用另外一组参量 $(E, \nu, \varepsilon, k, c, v)$, 这时的量纲如表 6.11 所示。可以得到式 (6.75) 的另外一种形式

$$E(k) = f(\nu, \varepsilon, k, c, v) \tag{6.76}$$

从而有 $\Pi_1 = E\varepsilon^{-3/2}k^{5/3}$, $\Pi_2 = \nu\varepsilon^{-1/3}k^{4/3}$, $\Pi_3 = v/c = Ma$, $Ma = v/c$ 是 Mach 数, 能谱 $\Pi_1 = f(\Pi_2, Ma)$, 即

$$E(k, Ma) = \varepsilon^{\frac{2}{3}}k^{-\frac{5}{3}}F[(k\eta)^{\frac{4}{3}}, Ma] \tag{6.77}$$

式 (6.77) 与式 (6.75) 是等价的, 因为关系 $\rho_0\rho^{-1} = [1 + (\gamma - 1)/2Ma^2]^{1/(\gamma-1)}$。

表 6.11 可压缩湍流问题参量的量纲 (二)

E	ν	ε	k	c	v
L^3T^{-2}	L^2T^{-1}	L^2T^{-3}	L^{-1}	LT^{-1}	LT^{-1}

利用 Barenblatt[43] 的不完全相似理论对可压缩各向同性湍流进行了初步的理论探索, 当 Re 和 Ma 很大时, 由于湍流的间歇性, 速度场能谱标度律改为

$$E(k, Ma) = AMa\nu^{-\frac{\beta}{3\ln Ma}}\varepsilon^{(\frac{2}{3}+\frac{\beta}{\ln Ma})}k^{(-\frac{5}{3}+\frac{4\beta}{3\ln Ma})} \tag{6.78}$$

在 Re 和 Ma 趋于无穷大的极限状态下, 完全变成了 Kolmogorov $-5/3$ 标度律 $E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}$。

6.8.2 对应 $\boldsymbol{v}=\rho^{\frac{1}{3}}\boldsymbol{u}$ 的可压缩湍流能谱

对于可压缩问题, 通常不直接使用速度而是使用密度加权速度 $\boldsymbol{v}=\rho^{\frac{1}{3}}\boldsymbol{u}$, 这样对应的加权能谱 E_ρ 可以表示为

$$E_\rho(k,\rho)=f(\nu,\varepsilon,k,\rho,Ma) \tag{6.79}$$

有关参量的量纲如表 6.12 所示。

表 6.12 可压缩湍流问题的量纲 (三)

E_ρ	ν	ε	k	ρ	Ma
$\mathrm{M}^{\frac{1}{3}}\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-2}$	$\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-1}$	$\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-3}$	L^{-1}	ML^{-3}	1

根据 Π 定理, 可以得到两个 Π, 其中, $\Pi_1=E_\rho\rho^{-1/3}\varepsilon^{-2/3}k^{5/3}$, $\Pi_2=(k\eta)^{4/3}$, 有关系 $\Pi_1=f(\Pi_2,Ma)$, 密度加权的能谱为

$$E(k,\rho)=\rho^{\frac{1}{3}}\varepsilon^{\frac{2}{3}}k^{-\frac{5}{3}}F[(k\eta)^{\frac{4}{3}},Ma] \tag{6.80}$$

如果 $Ma\to 0$, 则是不可压湍流; 如果 $Ma\to\infty$, 则是完全可压缩湍流。

在惯性子区 ($k\eta\to 0$) 的高可压缩情况 ($Ma\to\infty$) 下, 利用 Barenblatt[43,44] 的不完全相似理论, 以上方程可以简化为

$$E(k,\rho)=F(0,\infty)\rho^{\frac{1}{3}}\varepsilon^{\frac{2}{3}}k^{-\frac{5}{3}} \tag{6.81}$$

显然, $F(0,\infty)$ 一定是常数。以上初步结果是由孙博华[45-47] 于 2015 年预测的, 这个预测的正确与否需要其他方法如计算的进一步验证。式 (6.81) 与参考文献 [39] 中的数值模拟结果 (图 6.3) 是一致的。

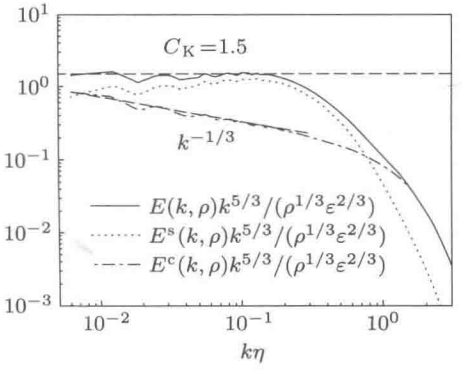

图 6.3 可压缩湍流能谱标度律数值模拟

6.9 湍流噪声问题

如速度高到一定程度, 气流中就会出现各种尺度的旋涡并相互作用而成为湍流, 这种现象就是湍流噪声, 通常也称为气动噪声。Lighthill 分别于 1952 年[48] 和 1954 年[49] 发表了两篇著名论文, 奠定了气动噪声问题的理论基础。

流体的质量守恒或称连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{6.82}$$

线性动量守恒方程

$$\rho \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v} \right) = -\boldsymbol{\nabla} p + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \boldsymbol{f} \tag{6.83}$$

其中,$\boldsymbol{f}$ 为单位体力, $\boldsymbol{v}$ 为速度, p 为声压。

将式 (6.82) 与 $\boldsymbol{v}$ 相乘后, 与式 (6.83) 相加, 导出一个动量守恒式

$$\frac{\partial \rho \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\sigma}) = \rho \boldsymbol{f} \tag{6.84}$$

式 (6.82) 对时间求偏微分, 用 $\boldsymbol{\nabla}$ 对式 (6.83) 进行标量积后, 再与式 (6.84) 联合, 就可得到

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \boldsymbol{\nabla} \cdot [\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\nabla} p + \rho \boldsymbol{f}] \tag{6.85}$$

如果不计体力, 以上方程还可以写为

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} : (\rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\sigma} + p) \tag{6.86}$$

由于希望研究声波, 类比波动方程, Lighthill 在式 (6.86) 两边同时加上 $-c_0^2 \boldsymbol{\nabla}^2 \rho$, c_0 为在静止介质中的声速。这样上式改写为

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_0^2 \boldsymbol{\nabla}^2 \rho = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} : \boldsymbol{T} \tag{6.87}$$

声压可以利用 $p = c_0^2 \rho$ 得到, 其中, $\boldsymbol{T} = \rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\sigma} + (p - c_0^2 \rho)\boldsymbol{I}$, 称为 Lighthill 湍流应力张量, 可以当作声源来考虑。Lighthill 进一步把这个方程简化为 $\boldsymbol{T} = \rho_0 \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}$, 这时的声压可以表示为

$$p = \frac{x_i x_j}{4\pi c_0^2 r^3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iiint T_{ij} \left(y, t - \frac{r}{c_0} \right) \mathrm{d}^3 y \tag{6.88}$$

6.9.1 Lighthill U^8 标度律

虽然有了解的表达式 (6.88), 但不能对声压做出定量预报, 因为湍流场不知道, 这个解只是一种形式。这时 Lighthill 就想到了普适的量级比较方法, 利用他自己推导出的式 (6.88) 进行量级分析。

设气流特征长度为 D, 特征速度为 U, 所以特征时间就是 D/U。在速度不是太高时, D 比气流声波的波长小得多, 所以声源可以认为是紧凑的, 小于波长的时间延迟可以不计。现在考察距离声源为 r 的声压 p 是多少。

由量纲分析可知, $\boldsymbol{T}=\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}$, 在大小上正比于 ρ_0U^2, x_i 正比于 r, $\partial/\partial t$ 正比于 U/D, 气柱体积正比于 D^3, 把这些用于声压公式 (6.88), 得到声压公式

$$p\propto\frac{1}{c_0^2r}\cdot\left(\frac{U}{D}\right)^2\cdot\rho_0U^2\cdot D^3\propto\frac{D}{r}\frac{\rho_0U^4}{c_0^2} \tag{6.89}$$

湍流噪声的总声功率 W 与声强 $p^2/(\rho_0c_0)$ 成正比, 所以可得到湍流噪声的总声功率

$$W=K\frac{\rho_0D^2}{c_0^5}U^8 \tag{6.90}$$

这就是 Lighthill U^8 标度律。K 为 Lighthill 常数, 一般取 $K=3\times10^{-5}$。

后来试验发现这个 Lighthill U^8 标度律中速度也不能太高, 需在 $Ma<1$ 的亚声速范围内。

6.9.2 超音速功率的实测标度律

速度在超声速时, 根据试验, 湍流噪声的总声功率 W 就不再遵守 Lighthill U^8 标度律了, 而是其他幂次。全部汇总如下:

$$W\propto\begin{cases}U^8, & Ma<1\\ U^6, & 1<Ma<1.5\\ U^4, & 1.5<Ma<2.5\\ U^3, & 2.5<Ma<5\end{cases} \tag{6.91}$$

从目前文献看, 除了 Lighthill U^8 标度律是按照量纲分析理论推导出来的, 速度的其他标度律都是根据试验数据由曲线拟合估计出来的。

6.9.3 湍流噪声的统一标度律

现在的问题是, 能否得到一个湍流噪声功率的普适公式, 可以统一描述不同 Mach 数的总声功率 W 与速度的关系式 (6.91)。显然, 这个问题不能从 Lighthill 的公式 (6.88) 中获得解答, 必须使用其他方法, 让我们完全使用量纲分析理论来试试。

显然, 这个问题包括 5 个参量: 特征长度 D、气体密度 ρ_0、气体速度 U、声速 c_0 和湍流噪声的总声功率 W。这些参量的量纲如表 6.13 所示。

表 6.13 湍流噪声问题参量的量纲

W	D	U	c_0	ρ_0
$\mathrm{L^2MT^{-3}}$	L	$\mathrm{LT^{-1}}$	$\mathrm{LT^{-1}}$	$\mathrm{ML^{-3}}$

该问题有 3 个基本量纲 L, M, T, 取 D, ρ_0, U 为基本物理量, 可以组成两个 Π。由 $\Pi_1 = WD^a\rho_0^bU^c$, 可以得到 $a=-2$, $b=-1$, $c=-3$, 所以有

$$\Pi_1 = \frac{W}{\rho_0 D^2 U^3} \tag{6.92}$$

同样, 由 $\Pi_2 = c_0 D^a \rho_0^b U^c$, 可以确定 $a=0$, $b=0$, $c=-1$, 所以有

$$\Pi_2 = \frac{c_0}{U} = \frac{1}{Ma} \tag{6.93}$$

其中, $Ma = U/c_0$。这样, 根据量纲分析的 Π 定理, 有普适量纲关系 $\Pi_1 = f(\Pi_2)$, 即

$$W = \rho_0 D^2 U^3 f\left(\frac{c_0}{U}\right) = \rho_0 D^2 U^3 f\left(\frac{1}{Ma}\right) \tag{6.94}$$

其中, 待定函数 f 是 Ma 的函数。这个公式是一般性的, 对于所有的 Ma 都普遍适用, 是湍流噪声的统一标度律。对于比较大的 Ma, 根据第四章介绍的 Barenblatt (1994) 的不完全相似论, 上式可以改写为

$$\begin{aligned} W &= K\rho_0 D^2 U^3 \left(\frac{1}{Ma}\right)^{-\alpha} = K\rho_0 D^2 Ma^{\alpha} U^3 \\ &= K\rho_0 D^2 U^3 \left(\frac{c_0}{U}\right)^{-\alpha} = K\frac{\rho_0 D^2}{c_0^{\alpha}} U^{3+\alpha} \end{aligned} \tag{6.95}$$

其中, α 为特征速度的幂次, K 为推广的 Lighthill 常数。在式 (6.94) 的框架下, 速度标度律式 (6.91) 可以写为统一的公式

$$W = K\rho_0 D^2 Ma^{\alpha} U^3 = \begin{cases} K\rho_0 D^2 c_0^{-5} U^8, & Ma < 1 \quad (\alpha = 5) \\ K\rho_0 D^2 c_0^{-3} U^6, & 1 < Ma < 1.5 \quad (\alpha = 3) \\ K\rho_0 D^2 c_0^{-1} U^4, & 1.5 < Ma < 2.5 \quad (\alpha = 1) \\ K\rho_0 D^2 U^3, & 2.5 < Ma < 5 \quad (\alpha = 0) \end{cases} \tag{6.96}$$

有一个极端情况, 就是 Ma 特别大, 假设 $Ma \to \infty$, 这样 $f(1/Ma) \to f(0)$。如果极限存在, 显然, $f(0)$ 只能是一个常数 C, 有高超声速时的湍流噪声总声功率

$$W = C\rho_0 D^2 U^3, \quad 5 < Ma < \infty \tag{6.97}$$

由湍流噪声总声功率 W 的表达式 (6.96) 和式 (6.97) 可以看出, W 永远与特征长度的平方 D^2 和密度 ρ_0 成正比。所以, 如果需要降低噪声, 就必须减小 D 或用小密度的稀薄气体, 降低气体的密度可以用加温的办法。

这里的湍流噪声总声功率 W 的表达式 (6.94)、式 (6.95) 由孙博华给出[50,51]。

6.9.4 结论

由以上分析可以看出, 湍流噪声的功率 – 速度谱满足量纲分析的普适规律, 证明了所有速度范围的功率服从速度的标度律。速度越低, 幂次越大, 最高为 8; 速度越高, 幂次越小, 最小为 3。利用以上公式, 还可以研究在速度变换过渡区间的噪声问题, 如 $\alpha = 2.5$ 的情况如何。这是以前的公式所没有包括的。

6.10 点源强爆炸问题

这个问题的解决在量纲分析发展史上是非常有名的, 通过这个问题的解决展示了量纲分析解决复杂问题的能力, 所以量纲分析一般都要介绍这个例子。

这个问题源于美国的第一颗原子弹试验, 非常有故事性。在第二次世界大战期间的困难时期, 1940 年, 英国科学家 George Thomson 邀请 G. I. Taylor 参加一个工作午餐, Thomson 是刚成立的英国铀军事应用委员会 (Military Application of Uranium Detonation, MAUD) 的主席, 他告知 Taylor 英国要制造一种利用核反应产生巨大能量的炸弹, 不过那时还没有使用 "原子弹" 这个名词。

传统炸弹的机械效能是通过在有限的空间里短时释放大量高温、高压气体获得的。而对于这种新型炸弹, 当时的问题是希望了解这种在极端聚焦条件下的点源强爆炸 (没有伴随气体的爆炸) 的机械效能是否与通常的炸弹类似[52-54]。显然, 这个问题的解决对原子弹的研制非常重要。

就在他们这次交流之前, 英国收到美国著名爆炸专家 G. Kistiakovsky①的报告。他认为, 即便这种炸弹能爆炸, 威力也没有期望的那么大。

R. W. Clark[55] 在他的名著中指出, 当时全英国只有一个人可以解决这个问题, 那就是 G. I. Taylor 教授。

Taylor 对于这个问题的研究报告[52] 于 1941 年 6 月 27 日 (星期五) 提交给了英国民防研究委员会②。

对于这个科学问题, Taylor 思考并计算空气在瞬间爆炸产生的运动和压力。他认为, 爆炸会产生一个热冲击波 (图 6.4), 即一个点源强爆炸瞬间释放巨大但有限的能量 E, 将对其周围的空气进行急剧的压缩和加温, 并以超过声速的球形冲击波向外急速膨胀。

他开始列出了问题的流体力学偏微分方程组, 发现这个方程组是非线性的。当时无法求解, 不得不进行简化。Taylor 只好借助量纲分析这个有力工具。

设空气的绝热指数为 γ (表征空气的可压缩性, 无量纲), 在爆炸时间为 t 时球形冲击波的波阵面半径为 R, 波阵面相当于一个球形边界面, 内部是超热的火

① G. Kistiakovsky 出生于乌克兰基辅, 哈佛大学教授, 曾领导研制第一颗原子弹内爆点火的爆炸镜头 (explosive lens)。

② The report is circulated to the Civil Defence Research Committee of the Ministry of Home Security in June of 1941.

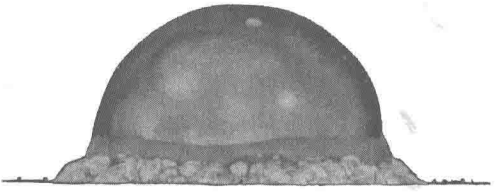

图 6.4 原子弹爆炸的球形冲击波

球, 外面是正常大气, 其密度为 ρ_0, 压强比球内压强小几个数量级, 可以忽略不计。这样, 这个复杂的问题就简化成一个只有 5 个参量的问题, 各参量的量纲如表 6.14 所示。希望确定它们之间的关系, 如希望知道球形冲击波的波阵面半径

$$R = f(E, \gamma, \rho_0, t) \tag{6.98}$$

使用量纲分析来研究一下这些量之间关系的情况。

表 6.14 点源强爆炸问题参量的量纲

R	E	γ	ρ_0	t
L	$\mathrm{ML^2T^{-2}}$	1	$\mathrm{ML^{-3}}$	T

这里有 $n = 5$ 个参量, 基本量纲有 M、L 和 T, 即 $j = 3$。根据 Π 定理, 可以构造出 $k = n - j = 2$ 个无量纲量 Π。取 E, t, ρ_0 为重复参量, 有关系

$$\Pi_1 = RE^{\alpha_1}\rho_0^{\beta_1}t^{\lambda_1} \tag{6.99}$$

$$\Pi_2 = \gamma E^{\alpha_2}\rho_0^{\beta_2}t^{\lambda_2} \tag{6.100}$$

因为 γ 是无量纲量, 所以 $\alpha_2 = \beta_2 = \lambda_2 = 0$, 即 $\Pi_2 = \gamma$。

对于 Π_1, 有

$$\dim \Pi_1 = \mathrm{L}(\mathrm{ML^2T^{-2}})^{\alpha_1}(\mathrm{ML^{-3}})^{\beta_1}\mathrm{T}^{\lambda_1} \tag{6.101}$$

可得到

$$\alpha_1 = -\frac{1}{5}, \quad \beta_1 = \frac{1}{5}, \quad \lambda_1 = -\frac{2}{5} \tag{6.102}$$

这样就得到

$$\Pi_1 = RE^{-\frac{1}{5}}\rho_0{}^{\frac{1}{5}}t^{-\frac{2}{5}} \tag{6.103}$$

根据量纲分析理论, 就有关系 $\Pi_1 = S(\Pi_2)$, 即

$$RE^{-\frac{1}{5}}\rho_0{}^{\frac{1}{5}}t^{-\frac{2}{5}} = S(\gamma) \tag{6.104}$$

其中, $S(\gamma)$ 是常数, 所以就得到球形冲击波的波阵面半径

$$R = S(\gamma)E^{\frac{1}{5}}\rho_0{}^{-\frac{1}{5}}t^{\frac{2}{5}} \tag{6.105}$$

以上就是 Taylor 著名的 $t^{2/5}$ 标度律, 冲击波的波阵面半径与时间的 2/5 次方成正比, 后来计算确定 $S(\gamma) \approx 1.033$。

由上式可得球形冲击波的波阵面上的速度

$$v(t) = \frac{2}{5} S(\gamma) E^{\frac{1}{5}} {\rho_0}^{-\frac{1}{5}} t^{-\frac{3}{5}} \tag{6.106}$$

可见球形冲击波的波阵面上的速度是变化的, 并且随时间的延长而衰减, 当时间很大时速度为零。

球形冲击波的波阵面上的加速度

$$a(t) = -\frac{6}{25} S(\gamma) E^{\frac{1}{5}} {\rho_0}^{-\frac{1}{5}} t^{-\frac{8}{5}} \tag{6.107}$$

球形冲击波的波阵面上的加速度是变化的, 是加速度冲击波, 也随时间的延长而衰减。还有球形冲击波的波阵面后面的压强

$$p(t) = C(\gamma) E^{\frac{2}{5}} {\rho_0}^{\frac{3}{5}} t^{-\frac{6}{5}} \tag{6.108}$$

球形冲击波的波阵面上的压强, 在爆炸中心附近非常大, 并随着时间的延长迅速衰减。

Taylor 把 $\Pi_1 = RE^{-1/5} {\rho_0}^{1/5} t^{-2/5}$ 作为一个相似变量, 即 $\xi = RE^{-1/5} {\rho_0}^{1/5} \cdot t^{-2/5}$。将原来是 R, t 的偏微分方程组转化成一个变量 ξ 的常微分方程, 大大降低了问题的难度, 从而也可以判定流场具有自相似的重要性质, 即不同时刻半径的状态变化规律相似。以上是 G. I. Taylor 在 1941 年得到的部分结果。

量纲分析的介绍到这里本来可以结束, 但与此相关的故事在科学技术史上也有一定的意义, 在此顺便介绍。1941 年 6 月 27 日 (星期五), Taylor 向英国有关机构提交了报告[52]。当时参加美国原子弹曼哈顿工程的大科学家 J. von Neumann 也研究同一个问题, 在提交报告前他利用周末检查了报告中的 168 个公式[56], 于 1941 年 6 月 30 日 (星期一) 提交给 Los Alamos 实验室, 比 Taylor 晚提交了 3 天。

由于保密的原因, 当时以上两个报告都没有公布。Taylor 在 1950 年才允许发表其研究内容[52], J. von Neumann 的结果在 1947 年发表在 Los Alamos 的 Blast Wave 报告的第二章中[57]。

同一个问题, 苏联参加原子弹研究的 L. I. Sedov 也进行过独立研究, 结果没有保密, 而是于 1946 年公开发表[58,59]。在 Taylor[54] 的第二篇论文中, Taylor 利用 1947 年美国公开发表的原子弹爆炸火球照片 (图 6.5)①, 测量出时间和半径, 并利用以上能量公式 $E = [S(\gamma)]^{-5} \rho_0 R^5 t^{-2}$ 预测了美国第一颗原子弹的爆炸当量

$$E = 7.19 \times 10^{13}\ \mathrm{J} \approx 1.7\text{万吨 TNT 的爆炸当量} \tag{6.109}$$

① Blast Wave: http://en.wikipedia.org.

据文献上介绍, 预测结果发布后很让美国政府难堪[①]。虽然爆炸照片已经公开了, 但这个爆炸当量当时是高度保密的参数。

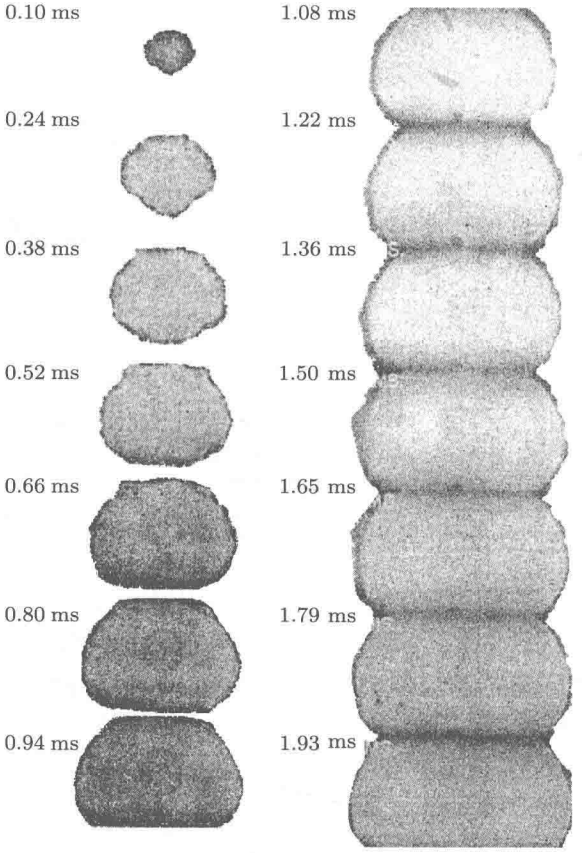

图 6.5 世界上第一颗原子弹 Trinity 爆炸火球从 0.10 ms 至 1.93 ms 的照片

提取照片的数据, 利用量纲分析公式预测原子弹的当量是 Taylor 的一大贡献, 获得了超出科学界的巨大社会效果, 所以 Taylor 的结果特别有名。

6.11 沙漠治理中草方格的障沙问题

6.11.1 草方格

草方格是由苏联专家 Petrov 引进到中国的。草方格沙障是一种防风固沙、涵养水分的治沙方法, 用麦草、稻草、芦苇等材料在沙漠中扎成方格形状 (图 6.6)。

① Batchelor: It led G I Taylor being mildly admonished by the US Army for publishing his deductions from their (unclassified) photographs.

在中国的典型应用是宁夏沙坡头的治理, 其治理的起因是为了保护此地的铁路线 (如附近的包兰线) 免受沙漠掩埋。草方格沙障的固沙成本高, 费工大, 但对于保护交通干线非常有效。沙坡头因治沙成就卓越, 经验丰富, 被世界治沙同行评为 "全球环境保护 500 佳"。

草方格沙障一方面能使地面粗糙, 减小风力, 另一方面可以截留水分, 如雨水, 提高沙层含水量, 有利于固沙植物的存活。沙区群众把沙障统称为风墙, 草方格沙障是用麦草、稻草、芦苇等材料, 在流动沙丘上扎设成方格状的挡风墙, 以削弱风力的侵蚀。施工时, 先在沙丘上划好施工方格网线, 要使沙障与当地的主风向垂直; 再将修剪均匀整齐的麦草或稻草等材料横放在方格线上, 将板锹之类的工具置于铺草料中间, 用力插下去, 插入沙层内约 15 cm, 使草的两端翘起, 直立在沙面上, 露出地面的高度为 20~25 cm; 最后用工具拥沙掩埋草方格沙障的根基部, 使之牢固。根据试验, 草方格沙障的规模以 1 m×1 m的正方形效果最好。

图 6.6 草方格沙障

6.11.2 草方格的空气动力学分析

这个问题曾由郑晓静领导的团队做过系统研究[60], 得到了非常有价值的成果。他们提出一种利用没有黏性的无旋有势流的模型, 针对草方格沙障防护区域内流场的特点, 提出一个单排理想涡列模型, 用以模拟实际风沙流场。利用流体力学的分析方法, 给出了与目前工程实际所建议的尺寸比较吻合的草方格沙障间距 (或草方格边长) 与出露草头高度的对应关系[60]。

从参考文献 [60] 中知道, 野外观测表明, 当风沙流经过新设置的草方格沙障时, 在其内部产生旋涡, 如图 6.7 所示。

经过足够长的时间后, 障内沙面形成光滑稳定的凹曲面。这样, 即使当强气流经过时, 沙面自身并不起沙, 从而达到固沙的目的。随着草头高度的提高, 其中的旋涡被完全包在草方格内且比较稳定。风洞试验也显示, 草方格内部的确存在旋涡运动。实际上, 如果地面水平, 层流通常将很快转换为湍流, 但由于稳定时刻地表凹槽与涡的存在, 他们把流动近似当作层流处理。

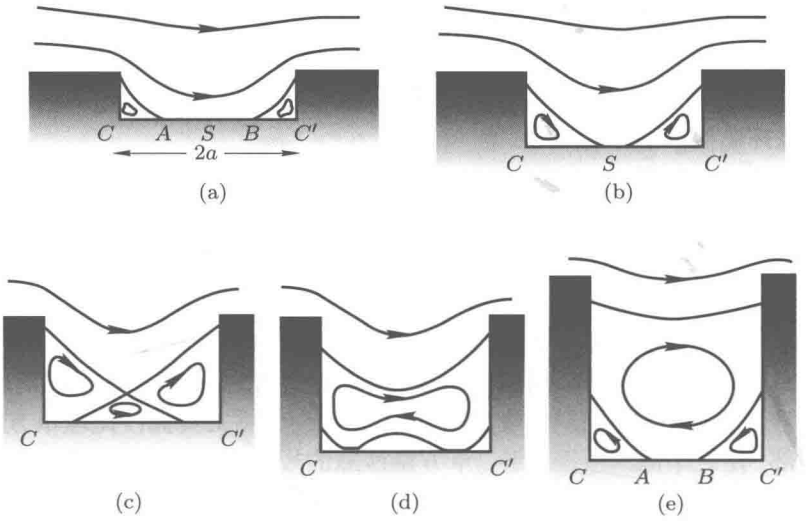

图 6.7 草方格内的空气旋涡示意图

6.11.3 草方格的量纲分析

稳定后的沙面可以看作上面风流动的边界表面, 所以风的作用实际就是试图改变其边界形状 (图 6.8), 这样从风流动的角度也可以把草方格的草头高度看作一种几何粗糙度。草方格的高宽比是什么关系才能有效地障沙就是这个研究需要回答的问题。

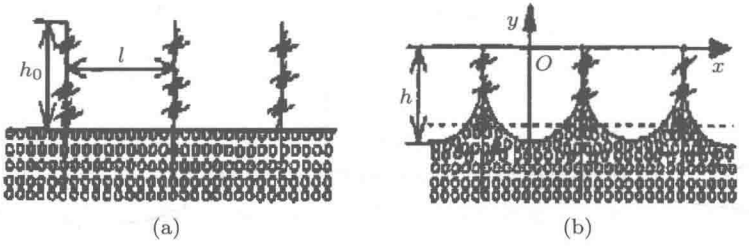

图 6.8 草方格沙面形成示意图: (a) 新设置时; (b) 稳定情况

我们不做具体的计算, 希望从量纲分析的角度, 考察一下这个问题。显然, 这个问题可以把空气看作无黏性的, 但是在这里我们认为需要把空气考虑成有黏性的。因为如果没有黏性就没有剪切, 空气就没有旋涡, 也不能使沙子产生旋涡, 就不可能起沙, 那也就没有我们现在讨论的问题了。

这个问题有 $n = 6$ 个参量, 即草方格的特征宽度 l, 草方格原来的草头高度 h_0, 草方格稳定后的草头高度 h, 风速 V, 空气密度 ρ, 空气的动力黏性系数 μ。

问题是如何确定草头高度与草方格宽度等参量的关系, 即

$$h_0 = f(h, l, V, \rho, \mu) \tag{6.110}$$

这个问题有 $j = 3$ 个基本量纲 L, M, T, 如表 6.15 所示, 所以无量纲量 Π 的个数是 $k = n - j = 6 - 3 = 3$, 即有

$$\Pi_1 = \frac{h_0}{l} \tag{6.111}$$

$$\Pi_2 = \frac{h}{l} \tag{6.112}$$

$$\Pi_3 = \frac{\rho V l}{\mu} \tag{6.113}$$

表 6.15 草方格的障沙问题参量的量纲

h_0	h	l	V	ρ	μ
L	L	L	LT^{-1}	ML^{-3}	$ML^{-1}T^{-1}$

其中, Π_1, Π_2 就是草方格沙障的特征参量 $\lambda = h/l$, $\lambda_0 = h_0/l$, Π_3 就是 Reynolds 数 $Re = \rho V l/\mu$, 从而有问题的关系式

$$\lambda_0 = f(\lambda, Re) \tag{6.114}$$

如果我们假设最极端的情况, 就是风沙稳定后的草头刚好被覆盖, 即草头高度完全被使用, 亦即稳定后的草头高度为零, $h = 0$ 或 $\lambda = 0$。因此, 原来草方格沙障的特征参量就与 λ 没有关系, 即可以改写为

$$\lambda_0 = f(Re) \tag{6.115}$$

以上两个关系式对于层流和湍流都适用, 其具体形式需要通过试验确定。

讨论: 上式 (6.115) 也可以改写为 $h_0 = lf(Re)$, 表明草头的高度与草方格的特征宽度成正比, 草方格越宽, 需要的草头就越高, 才能挡住沙子。通常草方格的宽度是 1 m, 即 $l = 1$ m, 经有关计算和测试, 得到草头高度 h_0 一般为 $15 \sim 20$ cm, 这样可以简单确定 $f(Re) = (0.15 + 0.2)/2 = 0.175$。沙漠治理中, 草方格问题的公式为

$$h_0 = 0.175l \tag{6.116}$$

$$l = 5.712\,9h_0 \tag{6.117}$$

例如, 当稻草草头高度 $h_0 = 13$ cm 时, 需要调节草方格的宽度, 由式 (6.117) 可以算出此时草方格的宽度就不再是 1 m 了, 当 $l = 74$ cm 左右时才能达到防沙的效果。

对于草方格障沙问题, 可以定义一个无量纲参量。草方格沙障的特征参量 $\lambda_0 = h_0/l$, 对于中国的大部分沙漠可以取 $\lambda_0 = 0.175$, 如果风速高可以适当提高些。

这部分内容引自参考文献 [61] 和 [62]。

6.11.4 结论

为了考虑黏性的影响, 通过量纲分析, 发现草方格的高宽比是 Re 的函数, 即 $h_0 = lf(Re)$, 根据前人的成果, 确定了一个草方格设计公式: $h_0 = 0.175l$。

6.12 考虑温度变化时微机电系统陀螺仪的标度律

这里的内容引自参考文献 [63], 介绍这部分内容的目的是展示对于涉及多物理的更复杂问题, 量纲分析是一个首选方法。目前, 由于手机等可穿戴电子类产品的海量应用, 人类已经进入到一个大数据时代。人的一切行为都可以通过传感器捕捉到, 并加以分析。显然, 人的机械运动行为是最基本的动作, 是需要感应的目标之一, 从而可以设计出一些特别的功能, 如久坐提醒、抬手点亮等。机械运动分直线运动和转动, 测量直线运动需要加速度计而测量转动就需要陀螺仪。有了这两个传感器就可以测量任何运动物体的姿态, 如导弹的运动和导航等。它们是基本力学元件, 根据不同原理分为机械陀螺仪、光纤陀螺仪、光导陀螺仪、激光陀螺仪和微机电系统 (micro-electro-mechanical system, MEMS) 陀螺仪等。可惜目前中国在MEMS陀螺这个领域基本全部依靠进口。

MEMS 陀螺由机械和电控子系统组成。其性能指标中零飘等关键参数受温度影响很大, 需要进行温度补偿。通过对MEMS静电驱动, 电容检测原理的研究发现, 一切温度的影响都主要表现在品质因子 Q 的影响上。

这个问题有力学量、电学量和热力学量, 涉及了 5 个基本量纲, 即 $j = 5$, 它们是 L, M, T, I 和 Θ。

问题一共有 $n = 11$ 个参量 (表 6.16)。对于机械部分, 参量有结构质量 m_s、结构阻尼 c_s、结构刚度 K_s、科氏 (Coriolis) 力 $F_g = 2\Omega v$ (Ω 为转速, v 为驱动速度)、科氏力频率 ω_g、结构热膨胀系数 α、温度变化 ΔT。对于电控部分, 参量有电阻 R、电容 C、电感 L_G 和电压输出 V。所以有 $k = n - j = 11 - 5 = 6$ 个无量纲量 Π 。

表 6.16 MEMS 陀螺仪温补问题参量的量纲

m_s	c_s	K_s	F_g	ω_g	α	ΔT
M	MT^{-1}	LT^{-1}	T^{-1}	T^{-1}	1	Θ
V	R	C	L_G			
$L^2MT^{-3}I^{-1}$	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	$L^2MT^{-2}I^{-2}$			

问题是希望获得输出电压 V 与其他变量的关系

$$V = f(m_{\mathrm{s}}, c_{\mathrm{s}}, K_{\mathrm{s}}, F_g, \omega_g, \alpha, \Delta T, R, C, L_{\mathrm{G}}). \tag{6.118}$$

这样可以构造 6 个无量纲量 Π

$$\Pi_1 = c_{\mathrm{s}} m_{\mathrm{s}}^{-\frac{1}{2}} K_{\mathrm{s}}^{-\frac{1}{2}} \tag{6.119}$$

$$\Pi_2 = \omega_g m_{\mathrm{s}}^{\frac{1}{2}} K_{\mathrm{s}}^{-\frac{1}{2}} \tag{6.120}$$

$$\Pi_3 = \alpha \Delta T \tag{6.121}$$

$$\Pi_4 = V Q_{\mathrm{s}}^{\frac{1}{4}} c_{\mathrm{s}}^{\frac{1}{4}} (\Omega v)^{-1} R^{-\frac{1}{2}} \tag{6.122}$$

$$\Pi_5 = C m_{\mathrm{s}}^{-\frac{1}{2}} K_{\mathrm{s}}^{\frac{1}{2}} \tag{6.123}$$

$$\Pi_6 = L_{\mathrm{G}} Q_{\mathrm{s}}^{-1} c_{\mathrm{s}}^{-1} R^{-1} \tag{6.124}$$

Q_{s} 为结构的品质因子, 上面的公式可以整理一下。引入电控谐振频率 ω_{E}, 这样就有电控子系统的品质因子 $Q_{\mathrm{E}} = \omega_{\mathrm{E}} L_{\mathrm{G}}/R$, 这样整理后成为

$$\Pi_1 = Q_{\mathrm{s}}^{-1} \tag{6.125}$$

$$\Pi_2 = \omega_g \omega_{\mathrm{s}}^{-1} \tag{6.126}$$

$$\Pi_3 = \alpha \Delta T \tag{6.127}$$

$$\Pi_4 = V Q_{\mathrm{s}}^{\frac{1}{4}} c_{\mathrm{s}}^{\frac{1}{4}} (\Omega v)^{-1} R^{-\frac{1}{2}} \tag{6.128}$$

$$\Pi_5 = C \omega_{\mathrm{s}} \tag{6.129}$$

$$\Pi_6 = Q_{\mathrm{E}} Q_{\mathrm{s}}^{-1} \omega_{\mathrm{E}} c_{\mathrm{s}}^{-1} \tag{6.130}$$

检测结构的谐振频率

$$\omega_{\mathrm{s}} = m_{\mathrm{s}}^{-\frac{1}{2}} K_{\mathrm{s}}^{\frac{1}{2}} \tag{6.131}$$

这样就可以得到开环的输出电压

$$V = Q_{\mathrm{s}}^{-\frac{1}{4}} c_{\mathrm{s}}^{-\frac{1}{4}} \Omega v R^{\frac{1}{2}} f(Q_{\mathrm{s}}^{-1}, \omega_g \omega_{\mathrm{s}}^{-1}, C\omega_{\mathrm{s}}, Q_{\mathrm{E}} \omega_{\mathrm{E}} Q_{\mathrm{s}}^{-1} c_{\mathrm{s}}^{-1}, \alpha \Delta T) \tag{6.132}$$

这是一个非常复杂的关系, 很难使用。

由于我们希望看到输出电压与温度变化的关系, 例如最简单时的关系, 只取温度变化的线性部分, 就得到

$$V = Q_{\mathrm{s}}^{-\frac{1}{4}} c_{\mathrm{s}}^{-\frac{1}{4}} R^{\frac{1}{2}} \alpha \Omega v \Delta T \tag{6.133}$$

由于 $Q_{\mathrm{s}} \propto 1/\sqrt{\Delta T}$, $c_{\mathrm{s}} \propto 1/\sqrt{\Delta T}$, $R \propto \Delta T$, 得到

$$V \approx \alpha \Omega v (\Delta T)^{\frac{7}{4}} \tag{6.134}$$

这就是最简化的关系, 一般情况要复杂得多。

讨论: 这个简单关系表明陀螺仪输出电压 V 与温度变化的 7/4 次方成正比, 由于 $7/4 < 2$, 这表明对温度补偿的曲线拟合的次数必须大于 2, 一般取三次曲线就可以了, 这是第一次为使用三次曲线进行温度补偿提供了理论基础; 同时也可以看出, 输出电压与转速和驱动速度成正比。

6.13 水力压裂问题

(油层) 水力压裂 (hydraulic fracturing) 又称为水力劈裂、水力裂解技术, 是开采页岩气时所用的方法, 用水压将岩石层压裂, 从而释放出其中的天然气或石油。第一次使用水力压裂的是 1947 年的现代水力压裂技术, 称为水平水力压裂技术。

水力压裂就是利用地面高压泵, 通过井筒向油层挤注具有较高黏性系数的压裂液。当注入压裂液的速度超过油层的吸收能力时, 则在井底油层上形成很高的压力, 当这种压力超过井底附近油层岩石的破裂压力时, 油层将被压开并产生裂缝。这时, 继续不停地向油层挤注压裂液, 裂缝就会继续向油层内部扩展。为了保持压开的裂缝处于张开状态, 接着向油层挤入带有支撑剂 (通常为石英砂) 的携砂液, 携砂液进入裂缝之后, 一方面可以使裂缝继续向前扩展, 另一方面可以支撑已经压开的裂缝, 使其不至于闭合。再接着注入顶替液, 将井筒的携砂液全部顶替进入裂缝, 用石英砂将裂缝支撑起来。最后, 注入的高黏性系数压裂液会自动降解排出井筒之外, 在油层中留下一条或多条长、宽、高不等的裂缝, 使油层与井筒之间建立起一条新的流体通道。压裂之后, 油气井的产量一般会大幅度增长。

压裂液的主要成分是水, 并混合 $3 \sim 12$ 种低浓度化学物质以达到比纯水更好的效果。一般压裂液含 98%~99.5% 的水, 而其他物质则占 0.5%~2%。压裂液配方可根据钻井的地质特征及需求而调整。每次压裂都只会使用几种化学物质, 如果某些物质特性不符合要求, 可从压裂液中完全剔除。

水力压裂是一项有广泛应用前景的油气井增产措施, 水力压裂法是目前开采天然气的主要方法。这项技术在美国被大范围推广, 但美国人正在担忧这项技术将污染水源, 从而威胁当地生态环境和居民身体健康, 认为这项技术给环境带来了极大的伤害, 包括使自来水自燃, 引发小幅地震等。反对者指出, 潜在的环境影响包括地下水的污染、淡水耗损、空气污染, 气体和水力压裂化学品迁移到地表面, 引起泄漏和回流的表面污染, 以及这些问题对健康的影响。

6.13.1 水力压裂的量纲分析

已知压裂液的密度 ρ、运动黏性系数 ν、静压 p、压裂液的流动速度 U、岩石的屈服强度 σ_{Y}、岩石断裂初始裂纹直径或长度 d、岩石的断裂韧性 K (岩石压裂一般属于拉裂, 所以可取 $K = K_{\mathrm{I}}$)。确定裂纹张开的直径或长度 D, 它代表

压裂后裂纹的大小。

显然, 裂纹张开的长度 D 应当是其他参量的函数

$$D = f(\rho, \nu, p, U, \sigma_{\mathrm{Y}}, K_{\mathrm{I}}, d) \tag{6.135}$$

问题中参量的量纲如表 6.17 所示。

表 6.17 水力压裂问题参量的量纲

ρ	ν	p	U	σ_{Y}	K_{I}	d	D
$\mathrm{ML^{-3}}$	$\mathrm{L^2T^{-1}}$	$\mathrm{L^{-1}MT^{-2}}$	$\mathrm{LT^{-1}}$	$\mathrm{L^{-1}MT^{-2}}$	$\mathrm{L^{-1/2}MT^{-2}}$	L	L

对于裂纹张开的长度 D 的问题, 一共有 8 个参量, 因为力学系统有 3 个基本量纲 L, M, T, 所以可以构造 5 个 Π。如果取 $d, \sigma_{\mathrm{Y}}, U$ 为基本物理量, 这 5 个 Π 可以统一表示为 $\Pi_i = \Psi_i d^a \sigma_{\mathrm{Y}}^b U^c$, 其中, Ψ_i 分别取为 $D, p, \rho, K_{\mathrm{I}}, \nu$。这样就有 5 个 Π, 即

$$\Pi_1 = \frac{D}{d}, \quad \Pi_2 = \frac{p}{\sigma_{\mathrm{Y}}}, \quad \Pi_3 = \frac{\rho U^2}{\sigma_{\mathrm{Y}}}, \quad \Pi_4 = \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sigma_{\mathrm{Y}}\sqrt{d}}, \quad \Pi_5 = \frac{\nu}{Ud} \tag{6.136}$$

这里的 Π_2 是压裂液静压与岩石屈服强度的比, 称为静态破坏数; Π_3 是压裂液动压与岩石屈服强度的比, 称为动态破坏数; Π_4 是 Irwin 数 Ir 的倒数; Π_5 是 Reynolds 数 Re 的倒数。其中静压和动压可以合在一起为总压 $P = p + \frac{1}{2}\rho U^2$。这样, 就有问题的无量纲关系

$$\frac{D}{d} = f\left(\frac{p}{\sigma_{\mathrm{Y}}}, \frac{\rho U^2}{\sigma_{\mathrm{Y}}}, \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sigma_{\mathrm{Y}}\sqrt{d}}, \frac{\nu}{Ud}\right) \tag{6.137}$$

该式也可写为

$$\frac{D}{d} = f\left(\frac{p + \frac{1}{2}\rho U^2}{\sigma_{\mathrm{Y}}}, \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sigma_{\mathrm{Y}}\sqrt{d}}, \frac{\nu}{Ud}\right) = f\left(\frac{P}{\sigma_{\mathrm{Y}}}, \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sigma_{\mathrm{Y}}\sqrt{d}}, \frac{\nu}{Ud}\right) \tag{6.138}$$

用已知的无量纲量表示, 裂纹张开的长度 D 可写为更简单的形式

$$D = d \cdot f\left(J, \frac{1}{Ir}, \frac{1}{Re}\right) \tag{6.139}$$

其中, 总破坏数 $J = P/\sigma_{\mathrm{Y}}$。式 (6.139) 是一个一般公式。它反映了流体流动 Re、岩石材料强度 Ir 和流固相互作用 J 对压裂尺寸的影响。因为对于给定的岩石, Irwin 数 Ir 是常数, 所以只要模型使用与原型一样的压裂液流速, 那么模型与原型的所有几何现状都是相似的。因此, 流体压裂现象满足几何相似律。利用这个几何相似律, 原则上便可利用小尺寸试验模拟大型压裂的形成效果。

6.13.2 不同情况的简化

从 Ir, Re, J 的定义看, Ir 对应岩石的断裂, Re 对应压裂液的流动, 而破坏数J 反映压裂液总压对岩石的破坏能力。它们对不同的状态起不同的作用。

如果裂纹处于扩展状态, 即 Irwin 数 Ir 达到其临界值 Ir_{c} (常数), 此时, 压裂的几何相似律表达式 (6.139) 可以简化为

$$D = d \cdot f\left(J, \frac{1}{Re}\right) \tag{6.140}$$

如果忽略压裂液的 Re, 这样上式可进一步简化为

$$D = d \cdot f(J) = d \cdot f\left(\frac{P}{\sigma_{\mathrm{Y}}}\right) = d \cdot f\left(\frac{p + \frac{1}{2}\rho U^2}{\sigma_{\mathrm{Y}}}\right) \tag{6.141}$$

式 (6.141) 实际上表明, 问题的控制参量可以减少到 4 个, 即 d, P, σ_{Y}, D, 这样可进一步写为

$$D = d \cdot f(J) = Cd \cdot \left(\frac{P}{\sigma_{\mathrm{Y}}}\right)^{\alpha} = Cd \cdot \left(\frac{p + \frac{1}{2}\rho U^2}{\sigma_{\mathrm{Y}}}\right)^{\alpha} \tag{6.142}$$

从物理上理解, C 和 $\alpha > 1$ 为常数, 这些常数只能从试验获得。从扩展压裂过程的 3 个参数 Ir, Re, J 的影响看, 破坏数J 起主导作用。

从以上压裂的发展过程可知, 初始裂纹长度 d 将被填充, 而变成现在的 D; 这个 D 又将被填充, 一直继续压裂, 裂纹也不断扩展, 扩展的长度与 D 服从相同的几何相似律表达式 (6.139)。

6.13.3 时间效应

应当指出, 岩石在压裂液的高压脉冲作用下的断裂不是简单地发生在瞬间, 从微裂纹的形成、扩展、互相连接, 直到形成宏观裂纹以致最终断裂, 需要经历一个发展过程。就是说岩石断裂有特征破坏时间 t_{p}, 其量纲是 T。考虑到岩石弹性能释放的最快速度就是其内的声速 $\sqrt{\sigma_{\mathrm{Y}}/\rho}$, 这样相应地就增加了一个无量纲量

$$\Pi_6 = \frac{\frac{d}{t_{\mathrm{p}}}}{\sqrt{\frac{\sigma_{\mathrm{Y}}}{\rho}}} = \frac{d}{t_{\mathrm{p}}}\sqrt{\frac{\rho}{\sigma_{\mathrm{Y}}}} \tag{6.143}$$

如果设 $d\sqrt{\rho/\sigma_{\mathrm{Y}}} = t_{\mathrm{c}}$ 作为岩石裂纹扩展的时间, 这样 $\Pi_6 = t_{\mathrm{c}}/t_{\mathrm{p}}$ 就是 Deborah 数 De。Deborah 数越小, 材料越软; Deborah 数越大, 材料越硬。这样式 (6.139)

可以改写为

$$D = d \cdot f\left(J, \frac{1}{Ir}, \frac{1}{Re}, De\right) \tag{6.144}$$

由于 De 中有 d, 所以几何相似律不再成立。

6.13.4 结论

这里的结果由孙博华[64] 获得。水力压裂的核心控制参量是总破坏数 J。当不考虑特征时间时, 满足几何相似律; 当考虑特征时间时, 几何相似律不再成立。

6.14 高超声速的相似律

1946 年, 钱学森对高超声速流动 (hypersonic flow) 的相似律进行了研究[65], 他对坐标 x, y 和扰动速度势函数 φ 同时进行幂相似变换, 并考虑边界条件, 确定了变换的幂次 $n = 1$, 进而得到高超声速的相似律。这个问题是相似论的一个应用, 这里的内容取自参考文献 [65]。

流速大大高于声速的流动称为高超声速流动。von Kármán 曾指出, 在许多方面高超声速流动都非常类似于牛顿空气动力学的微粒子理论。因此, 作用在倾斜 (翼) 面的压力将大于自由流动的压力, 该压力在数量上近似地与倾斜角度的平方成正比①, 而不像在超声速 (supersonic) 时该压力与倾斜角度是线性关系。事实上, E. Sänger[65] 已经利用这个概念设计了优化机翼和机体, 用于极高速度的高超声速飞行。

von Kármán[65] 对流速接近声速的跨声速 (transonic) 流动进行了研究, 他利用流场的仿射变换, 把跨声速流动的偏微分方程组简化为一个无量纲方程, 得到了跨声速问题的相似律。钱学森采用同样的方法研究高超声速流动的相似律, 这些相似律或许有利于高超声速风洞试验的测试数据修正。

6.14.1 高超声速的微分方程

如果设 u, v 分别为 x, y 方向的流速分量, a 为局部声速, 那么, 无旋二维流动的微分方程就是

$$\left[1 - \left(\frac{u}{a}\right)^2\right]\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{uv}{a^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left[1 - \left(\frac{v}{a}\right)^2\right]\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{6.145}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{6.146}$$

如果在 x 方向流速为 V 的流体中放入一个薄物体, 就会产生扰动。如果引入扰动速度势 φ 的方程

$$u = V + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \tag{6.147}$$

① 即牛顿 $\sin^2\alpha$ 定律, 其中, α 为攻角。

式 (6.146) 将自动满足。

如果 a_0 是空气在静止时的声速, 而 a^0 是对应自由流动 V 的声速, 那么对于可压缩气体, 它们之间存在关系

$$\begin{aligned} a^2 &= a_0^2 - \frac{\gamma-1}{2}(u^2+v^2) \\ &= a_0^2 + \frac{\gamma-1}{2}\left[V^2 + 2V\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{6.148}$$

$$(a^0)^2 = a_0^2 - \frac{\gamma-1}{2}V^2 \tag{6.149}$$

其中, γ 为气体绝热指数。

对流过薄物体的高超声速流动来说, 由于 a^0 与 $\partial\varphi/\partial x$、$\partial\varphi/\partial y$ 与 V 相比都很小。把式 (6.147)、式 (6.148) 和式 (6.149) 代入式 (6.145), 并只保留到二阶项, 可得到简化的微分方程

$$\begin{aligned} &\left[1-(\gamma+1)\frac{Ma^0}{a^0}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\gamma-1}{2(a^0)^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 - (Ma^0)^2\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - 2\frac{Ma^0}{a^0}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \\ &\left[1-(\gamma-1)\frac{Ma^0}{a^0}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\gamma+1}{2(a^0)^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \tag{6.150}$$

其中, Ma^0 是自由流动的 Mach 数, 即

$$Ma^0 = \frac{V}{a^0} \tag{6.151}$$

6.14.2 二维流动的相似律

设 $2b$ 和 δ 分别为机翼的长度和厚度, 引入无量纲坐标 ξ 和 η 并定义为

$$x = b\xi, \quad y = b\left(\frac{\delta}{b}\right)^n \eta \tag{6.152}$$

其中, n 为待定幂次。von Kármán[1] 已经证明在薄物体周围, 速度场的变化主要集中在薄物体附近的一个狭窄区域, 即在高超声速边界层内。因此, 为了考察流速的变化, 必须沿机翼面法向展开。这与 Prandtl 通过沿法向展开由精确的 Navier-Stokes 黏性方程推导出边界层方程的思路完全类似。正因为如此, n 必须是正数, 以便使参量 η 远远大于 y/b。这种猜测由后面的计算证实。

速度势 φ 的合适形式是

$$\varphi = a^0 b\frac{1}{Ma^0}f(\xi,\eta) \tag{6.153}$$

将式 (6.152) 和式 (6.153) 代入式 (6.150), 可以得到

$$\left(\frac{\delta}{b}\right)^{2n}\left[1-(\gamma+1)\frac{\partial f}{\partial \xi}-\frac{\gamma-1}{2}\frac{1}{(Ma^0)^2\left(\frac{\delta}{b}\right)^{2n}}\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2\right]\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}-$$
$$(Ma^0)^2\left(\frac{\delta}{b}\right)^{2n}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}+$$
$$\left[1-(\gamma-1)\frac{\partial f}{\partial \xi}-\frac{\gamma+1}{2}\frac{1}{(Ma^0)^2\left(\frac{\delta}{b}\right)^{2n}}\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2\right]\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}=0 \tag{6.154}$$

在无穷远的边界条件要求流动速度必须是 V, 所以当 $(\xi,\eta)\to(\infty,\infty)$ 时有

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}=\frac{\partial f}{\partial \eta}=0 \tag{6.155}$$

如果薄物体是对称的, 机翼面的边界条件可以写为

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=0}=a^0Ma^0\left(\frac{\delta}{b}\right)h(\xi),\quad -1<\xi<1 \tag{6.156}$$

其中, $h(\xi)$ 是在 $-1<\xi<1$ 范围内沿机翼长度方向给定的厚度函数。边界条件式 (6.156) 在式 (6.152) 和式 (6.153) 的变换下变为

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}=(Ma^0)^2\left(\frac{\delta}{b}\right)^{1+n}h(\xi) \tag{6.157}$$

由于机翼非常薄, 所以 δ/b 非常小, 这样与其他两项相比, 式 (6.154) 的第一项可以省略, 这样微分方程和边界层就要求单一参数

$$n=1 \tag{6.158}$$

即如果

$$Ma^0\frac{\delta}{b}=K \tag{6.159}$$

式 (6.154) 就简化为

$$\left[1-(\gamma-1)\frac{\partial f}{\partial \xi}-\frac{\gamma+1}{2}\frac{1}{K^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2\right]\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}=K^2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} \tag{6.160}$$

以及边界条件变为

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}=\frac{\partial f}{\partial \eta}=0,\quad (\xi,\eta)\to(\infty,\infty) \tag{6.161}$$

和

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)_{\eta=0}=K^2h(\xi),\quad -1<\xi<1 \tag{6.162}$$

高超声速的相似律可以表述如下: 如果一系列不同机翼具有相同厚度分布 $h(\xi)$, 但具有不同的厚度比 δ/b, 这时只要调节 Mach 数使 $Ma^0\delta/b$ 保持不变并等于 K, 那么不同物体的高超声速流动的流场函数 $f(\xi,\eta)$ 就是彼此相似的, 其中流场函数 $f(\xi,\eta)$ 由式 (6.160) 和式 (6.161) 确定。

设 p_0 为总压, p^0 为自由流动的压强, p 为当地压强, 它们有关系

$$p^0=p_0\left[1+\frac{1-\gamma}{2}(Ma^0)^2\right]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}},\quad p=p_0\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\frac{u^2+v^2}{a^2}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \tag{6.163}$$

使用以前的符号并适当保留有关项后, 当地压强可以写为

$$p=p^0\left[1-(\gamma-1)\frac{\partial f}{\partial\xi}-\frac{\gamma-1}{2}\frac{1}{K^2}\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\right)^2\right]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \tag{6.164}$$

有了压强就可以计算阻力D, 可由下式计算

$$\begin{aligned}D&=2\int_{-b}^{b}(p)_{\eta=0}h(\xi)\frac{\delta}{b}\mathrm{d}x\\&=2bp^0\frac{\delta}{b}\int_{-1}^{1}\left[1-(\gamma-1)\frac{\partial f}{\partial\xi}-\frac{\gamma-1}{2}\frac{1}{K^2}\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\right)^2\right]_{\eta=0}^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}h(\xi)\mathrm{d}\xi\end{aligned} \tag{6.165}$$

如果希望计算阻力系数 C_D, 就有

$$\begin{aligned}C_D&=\frac{D}{\frac{1}{2}\rho^0V^2(2b)}\\&=\frac{1}{(Ma^0)^2}\left\{\frac{2}{a^0}K\int_{-1}^{1}\left[1-(\gamma-1)\frac{\partial f}{\partial\xi}-\frac{\gamma-1}{2}\frac{1}{K^2}\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\right)^2\right]_{\eta=0}^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}h(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}\end{aligned} \tag{6.166}$$

对应给定的厚度变化 $h(\xi)$, 上面大括号中的量只是相似数 K 的函数 $\Delta(K)$, 因此, 阻力系数可写为

$$C_D=\frac{1}{(Ma^0)^2}\Delta(K)=\frac{1}{(Ma^0)^2}\Delta\left(Ma^0\frac{\delta}{b}\right) \tag{6.167}$$

类似地, 可以得到升力L 的升力系数 C_L

$$C_L=\frac{L}{\frac{1}{2}\rho^0V^2(2b)}=\frac{1}{(Ma^0)^2}\Delta(K)=\frac{1}{(Ma^0)^2}\Delta\left(Ma^0\frac{\delta}{b}\right) \tag{6.168}$$

这些相似律表明, 在攻角正比于厚度比 δ/b 的具有相同厚度分布的机翼, 乘积 $C_D(Ma^0)^2 = \Delta(K)$ 和 $C_L(Ma^0)^2 = \Delta(K)$ 就只是单参数 $K = Ma^0(\delta/b)$ 的函数。

式 (6.167) 和式 (6.168) 与具有线性限制的 Ackeret 理论[65] 完全吻合。根据 Ackeret 理论, 外形相似的物体其阻力和升力系数分别为

$$C_D \propto \frac{\left(\dfrac{\delta}{b}\right)^2}{\sqrt{(Ma^0)^2-1}} \tag{6.169}$$

$$C_L \propto \frac{\dfrac{\delta}{b}}{\sqrt{(Ma^0)^2-1}} \tag{6.170}$$

对于 Mach 数 Ma^0 特别高的高超声速流动, 以上系数可以简化为

$$C_D \propto \frac{\left(\dfrac{\delta}{b}\right)^2}{Ma^0} \tag{6.171}$$

$$C_L \propto \frac{\dfrac{\delta}{b}}{Ma^0} \tag{6.172}$$

式 (6.171) 和式 (6.172) 分别与式 (6.167) 和式 (6.168) 完全吻合。不过, 式 (6.167) 和式 (6.168) 更一般和完整。

6.14.3 轴对称流动

对于轴对称高超声速流动, 坐标 y 就是距离原点的半径。采用完全类似的分析, 可以推导出轴对称流动的微分方程和边界条件

$$\begin{aligned}&\left[1-(\gamma-1)\frac{\partial f}{\partial \xi}-\frac{\gamma+1}{2}\frac{1}{K^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2\right]\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}+\\&\left[1-(\gamma-1)\frac{\partial f}{\partial \xi}-\frac{\gamma-1}{2}\frac{1}{K^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2\right]\frac{1}{\eta}\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\\&\qquad=2\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}+K^2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\end{aligned} \tag{6.173}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}=\frac{\partial f}{\partial \eta}=0,\quad (\xi,\eta)\to(\infty,\infty) \tag{6.174}$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}=K^2h(\xi),\quad -1<\xi<1 \tag{6.175}$$

其中, $h(\xi)$ 为沿机翼长度方向的横截面的厚度分布函数, 对于二维流动, $K = Ma^0(\delta/b)$。

机翼最大横截面阻力系数 C_D 满足下面的相似律

$$C_D = \frac{1}{(Ma^0)^2} \Delta \left(Ma^0 \frac{\delta}{b} \right) \tag{6.176}$$

可以看出, 参考文献 [65] 在发表时, 世界还没有高超声速风洞, 是提前为高超声速风洞试验提供相似理论依据, 是超前性的研究。

钱学森得到高超声速的相似律: 对于具有相同厚度变化 $h(\xi)$ 但尺寸不同的薄物体, 只要调节 Mach 数 Ma^0 使它们具有相同的相似数 $K = Ma^0\delta/b$ (可以称为钱学森数), 就能使其在高超声速流动的流场函数 $f(\xi, \eta)$ 互相相似。高超声速的流动相似律的研究对于风洞试验特别有指导意义, 对于小尺寸的模型只要相似数与实际物体一样, 就具有相同的流场, 这样就可以使用小尺度模型通过风洞试验来模拟原型的流场。

量纲分析或相似论本质就是变换, 而研究变换不变性的工具就是 Lie 群, 这将是 Lie 群讨论的问题。

第七章
群论基本概念

美丽的对称无处不在, 它在我们的世界中扮演着重要的角色。几何图形的对称不难理解, 如雪花是六角形对称的。数学家们用他们独特的语言来定义对称, 他们发明出了一套又一套的理论来描述对称, 群论便是描述对称的一种最好的语言。群论起源于对代数方程的研究, 它是人们对代数方程求解问题进行逻辑考察的结果。群论被公认为 19 世纪最杰出的数学成就之一。

群论始于 19 世纪 30 年代, E. Galois 研究用根式求解一元多项式方程, 在研究过程中他引进了群的概念, 对群论的产生和发展都有巨大的影响。他用 Galois 群解决了五次方程求解问题。某个数域上的一元 n 次多项式方程, 它的根之间的某些置换所构成的置换群被定义为该方程的 Galois 群。1832 年, Galois 证明了一元 n 次多项式方程能用根式求解的一个充分必要条件是该方程的 Galois 群为可解群。由于一般的一元 n 次方程的 Galois 群是 n 个文字的对称群 S_n, 而当 $n \geqslant 5$ 时, S_n 不是可解群, 所以一般五次以上的一元方程不能用根式求解。

时至今日, 群的概念已经普遍地被认为是数学及其许多应用中最基本的概念之一。它不但渗透到如几何学、代数拓扑学、函数论、泛函分析及其他许多数学分支中并起着重要的作用, 还形成了一些新学科, 如拓扑群、Lie 群、代数群、算术群等, 它们具有与群结构相联系的其他结构, 如拓扑、解析流形、代数簇等, 并在结晶学、理论物理、量子化学甚至 (代数) 编码学、自动机理论等方面都有

重要的应用。作为推广群的概念的产物, 半群和幺半群理论及其对计算机科学和对算子理论的应用, 也有很大的发展。群论的计算机方法和程序的研究已在迅速地发展。

由于物理规律有对称性, 而群论是研究对称性的有力工具, 故群论与物理学的结合是自然的事。实际上, 爱因斯坦 (Einstein) 在 20 世纪的最大成就 $E = mc^2$ 就是分析时空对称群 Lorentz 群的结果。这件事揭示了时空是有相互联系的, 这在当时是非常惊人的见解, 吸引了世人的注意而忽略了其群论内涵。如果将对称概念从几何推广到物理研究中的一般情形, 便被表述为: 如果某种变换能够保持系统的 Lagrange 量不变, 从而保持物理规律不变的话, 就说系统对此变换是对称的。

群在抽象代数中具有基本的重要地位: 许多代数结构包括环、域和模等, 可以看作在群的基础上添加新的运算和公理而形成的。群的概念在数学的许多分支中都有出现, 而且群论的研究方法也对抽象代数的其他分支有重要影响。群论的重要性还体现在物理学和化学的研究中, 因为许多不同的物理结构, 如晶体结构和氢原子结构可以用群论方法来进行建模。于是, 群论和相关的群表示论在物理学和化学中有大量的应用。

就科学内容而言, 群论属于数学范畴, 在许多数学分支中都有它的应用。它还被广泛用于物理、化学及工程等许多领域, 尤其是物理学成为受惠最多的学科。从经典物理中对称性和守恒律的研究到量子力学中角动量理论及动力学对称性的探索, 再到同位旋、超荷和 $SU(3)$ 对称性在现代基本粒子物理中的应用等, 无不闪耀着群论思想的光辉。粗略地说, 我们经常用群论来研究对称性, 这些对称性能够反映出在某种变化下的某些变化量的性质, 它也跟物理方程联系在一起。基础物理中常被提到的 Lie 群, 就类似于 Galois 群被用来解代数方程, 与微分方程的解密切相关。

E. Galois 创立了具有划时代意义的群论, 在数学发展史上做出了重大贡献。群论开辟了全新的研究领域, 以结构研究代替计算, 将偏重于用计算研究的思维方式转变为用结构观念研究的思维方式。在许多研究群论的数学家眼中, 也指在抽象群论中, 数学家关心的是各元素间的运算关系, 即群的结构, 而不管一个群的元素的具体含义是什么。群论把数学运算归类, 对近代代数的形成和发展产生了巨大影响。同时, 这种理论对于物理、化学的发展, 甚至对于 20 世纪结构主义哲学的产生和发展都有巨大的影响[66]。

7.1 群的定义

在数学中, 群是一种代数结构, 由一个集合与一个二元运算组成。

一个群必须满足一些被称为 “群公理” 的条件, 也就是封闭性、结合律、单位元和逆元。很多熟知的数学结构如数系统都遵从这些公理, 例如整数配备上加

法运算就形成一个群。如果将群公理的公式从具体的群及其运算中抽象出来, 就使得人们可以用灵活的方式来处理起源于抽象代数或其他许多数学分支的实体, 而同时保留对象的本质结构性质。

群在数学内外各个领域中是无处不在的, 这使得它们成为当代数学组成的中心原理。

群与对称概念具有相同的基础根源。对称群如此描述物体的对称特征: 它是保持物体不变的变换的集合。这种对称群, 特别是连续 Lie 群, 在很多学科中扮演重要角色。例如, 矩阵群可以用来理解在狭义相对论底层的基本物理定律和在分子化学中的对称现象。

群论起源于对代数方程的研究。E. Galois 在研究当时的代数学的中心问题即五次以上的一元多项式方程是否可用根式求解的问题时, 提出和发展了群的概念。在得到来自其他领域如数论和几何学的贡献之后, 群概念在 1870 年左右形成并牢固建立。现代群论是非常活跃的数学学科, 它以自己的方式研究群。为了探索群, 数学家发明了各种概念来把群分解成更小的、更好理解的部分, 例如子群、商群和单群。除了它们的抽象性质, 群理论家还从理论和计算两种角度来研究具体表示群的各种方式。

用现代群论的说法, 4 个元素构成了 1 个群, 因为这 4 个元素两两之间定义了一种乘法, 并且满足群的如下 4 个基本要求, 不妨将它们简称为 "群 4 点"。群是一个集合 G 连同一个运算 "$\cdot$", 它结合任何两个元素 a 和 b 而形成另一个元素, 记为 $a \cdot b$, 符号 "$\cdot$" 是对具体给出的运算, 例如整数加法的一般占位符。要具备成为群的资格, 这个集合和运算 $(\cdot)$ 必须满足群公理的 4 个基本要求:

(1) 封闭性: 对于所有 G 中的 a, b, 运算 $a \cdot b$ 的结果也在 G 中。

(2) 结合律: 对于所有 G 中的 a, b 和 c, 等式 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ 成立。

(3) 单位元: G 中存在一个元素 e, 使得对于所有 G 中的元素 a, 等式 $e \cdot a = a \cdot e = a$ 成立。

(4) 逆元: 对于每个 G 中的 a, 存在 G 中的一个元素 b, 使得 $a \cdot b = b \cdot a = e$, 这里的 e 是单位元。

进行群运算的次序是重要的。换句话说, 把元素 a 与元素 b 结合, 所得到的结果不一定与把元素 b 与元素 a 结合所得到的结果相同; 亦即, 下列等式不一定恒成立: $a \cdot b = b \cdot a$。

最常见的群之一是整数集 $\boldsymbol{Z}$, 它由以下数组成: $\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots$

对于任何两个整数 a 和 b, 它们的和 $(a+b)$ 也是整数。换句话说, 在任何时候, 把两个整数相加都能得出整数的结果。这个性质叫做在加法下封闭。

对于任何整数 a, b 和 c, 有 $(a+b)+c = a+(b+c)$。用语言来表达, 先把 a 加到 b, 然后把它们的和加到 c, 所得到的结果与把 a 加到 b 与 c 的和是相等的。这个性质叫做结合律。

对于任何整数 a, 那么 $0+a=a+0=a$。零叫做加法的单位元, 因为把它加到任何整数都得到相同的整数。

对于任何整数 a, 存在另一个整数 b, 使得 $a+b=b+a=0$。整数 b 叫做整数 a 的逆元, 记为 $-a$。

这个等式在整数于加法下的群中总是成立的, 因为对于任何两个整数都有 $a+b=b+a$ (加法的交换律)。但是在对称群的例子中不总是成立。使等式 $a\cdot b=b\cdot a$ 总是成立的群叫做 Abel 群。因此, 整数加法群是 Abel 群, 而对称群不是。

通俗地讲, "群" 就是那么一群东西, 我们为它们两两之间规定一种 "作用", 两两作用的结果还是属于这群东西; 其中有一个特别的东西, 与任何其他东西作用都不起作用; 此外, 每样东西都有另一个东西和它抵消; 最后, 如果好几个东西接连作用, 只要这些东西的相互位置不变, 结果与作用的顺序无关。

由于群的例子非常多, 所以群的概念十分有用。它不仅在数学中几乎无处不在, 同样也出现在其他学科中[66]。

7.2 Lie 群的创立和传播

在 1870 年前后, Sophus Lie 开始研究连续变换群即解析变换 Lie 群[67-69], 用来阐明微分方程的求解及其解的分类。Lie 希望借鉴 Galois 群在代数方程求解的成就, 发展一种用于求解微分方程的系统方法。与 Galois 群是离散群不同, Lie 需要研究的是连续群。在数学中, Lie 群是一个群, 同时也是一个微分流形, 具有在群操作下保持光滑结构的性质。

19 世纪后期, Sophus Lie 曾听过 Ludwig Sylow 的群论课, 后来 Lie 又要了 Sylow 的讲义, Lie 受到 Galois 离散群的启发, 提出了连续变换群的概念, 为连续变换群奠定了理论基础。连续群和离散群的性质大不相同, 就像盒子里装的是一堆玻璃球与装的是一堆玻璃细砂不同一样, 因而专门有研究连续群的理论。因为连续群是由 n 个连续变量之间变化而生成的, 这 n 个变量同时也构成一个 n 维空间。如果一个由 n 个变量生成的连续群既有群的结构, 又是一个 n 维微分流形, 便称为 Lie 群。

对于 Lie 群早期历史的最权威的来源[70], Sophus Lie 本人认为 1873 年至 1874 年的冬天是连续群理论的开创时期。不过, 参考文献 [70] 中指出, 连续群的开创应当是从 1869 年到 1873 年的 4 年中, 期间的研究促成了该理论的创立。Sophus Lie 的一些早期想法是与 F. Klein 共同提出的。从 1869 年 10 月至 1872 年在柏林的两年中, Lie 几乎每天都与 Klein 见面讨论。Lie 的主要成果于 1884 年发表在挪威杂志上。1884 年, 年轻的德国数学家 F. Engel 到挪威与 Lie 一起工作, 协助 Lie 完成 3 卷巨著 *Theorie der Transformationsgruppen* (《变换群理论》), 并分别于 1888 年、1890 年和 1893 年出版[67-69]。

之后, 世界上第一部有关 Lie 群的教科书由美国学者 J. M. Page 于 1897 年完成 [71], Page 本人是听 Lie 讲授 Lie 群的第一批学生之一。美国学者 A. Cohen 于 1911 年出版了第二本教科书[72]。1926 年, 在开罗的美国大学执教的 Ince 在其《常微分方程》书中介绍了 Lie 群对称方法[73]。之后, Lie 群相关的研究历经了很长时间的沉寂, Lie 群没有得到特别的关注和发展。

直到 1950 年美国学者 G. Birkhoff 出版用 Lie 群研究流体力学的专著[74]。由于 Birkhoff 的高水平研究, Lie 群对称方法又开始引起更多人的注意并进入了一个高速应用发展阶段。特别是, Lie 群主要应用于理论物理的研究。

在应用 Lie 群对称方法求解微分方程的发展中, 特别要提到 Ovsiannikov[75] 的微分方程的 Lie 群分析专著及其领导的苏联学派对于 Lie 群应用和符号计算机运算的发展起到的推动作用。Ovsiannikov 的专著于 1967 年由 Bluman 翻译成英文。1965 年, Ames 的专著研究了工程中的非线性问题[76]。后来参考文献 [77]、[78]、[79]、[80]、[81]、[82]、[83] 和 [84] 等对用 Lie 群求解微分方程做出了有用的贡献, 这些著作也是本书的主要参考。

第八章

Lie 群分析的基本概念

各种工程和科学问题在建立了模型之后，一般都归结为微分方程的求解问题。线性微分方程一般比较容易求解，而非线性微分方程其求解一般是非常困难的，绝大多数情况必须或不得不使用数值方法求解。随着计算机的发展，数值方法得到很大的发展，计算能力也越来越强大，已经有了许多商业性科学计算软件。虽然数值方法有许多优点，但由于它只能给出特定条件下的结果，很难由此推广或预测更一般的情况。因此，包含更多信息的解析解或精确解一直是科学界孜孜追求的最佳目标。目前，符号运算的软件也越来越强大，使得解析解的求解越来越成为可能。

即使有些非线性问题可以通过变换得到精确解，但这种变换往往需要特别的个人技巧，而这些技巧只能“就事论事”，没有一般性，很难推广。所以，急需一种系统的求解非线性微分方程的方法。

Lie 群是非常完备的理论体系，是求解微分方程系统的方法。其核心思想是希望从方程的一个解出发，通过变换群的作用，得到一系列满足原方程的解。Lie 提出这个方法的核心是不变性，不变就是对称，所以也称为 Lie 群对称方法。

Lie 群为求解非线性微分方程提供了一种较普遍的方法，不再需要特别的变换技巧。Lie 群不仅可以用来求解而且可以用来分析微分方程的性质，这对于有些目前还不能求解的方程来说是非常重要的分析手段。Lie 群或 Lie 群对称方法

当初就是为了整理大量的各种求解微分方程的技巧而总结出来的。大量的实践表明, 群理论是求解非线性微分方程解析解的通用和有效的方法。当其他的一些积分方法失效时, 群理论是求解微分方程的可选择的工具。Lie 群方法的最大优点在于, 在可解的情况下, 群分析理论在处理线性方程和非线性方程的问题时是等同的。Lie 群对称性分析的方法将许多构建微分方程解析解的技巧进行了系统化和扩展。

在数学中, Lie 群是一个群, 同时也是一个微分流形, 具有在群操作下保持光滑结构的性质。Lie 群是一类光滑流形, 因此能够利用微积分对其进行研究。此外, Lie 群理论的核心思想之一是用 Lie 群的局部或者线性化版本来替换全局目标 Lie 群, 这类局部线性化表示被 Lie 称为无穷小群, 也即后人所称的 Lie 代数。

Lie 群在物理中是基础性的, Noether 守恒律把连续对称与守恒律关联起来。在空间和时间中, 旋转和平移不变性对应物理的守恒律。

8.1 3 个微分方程求解实例

为了介绍 Lie 群或对称方法, 让我们先来看看几个例子[79]。

例 8.1 现在有一个一阶的非线性齐次微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x^2+y^2}{xy} \tag{8.1}$$

我们知道这个方程可以通过分离变量求解, 即引入 $u=y/x$, 式 (8.1) 可以变换为

$$u\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{8.2}$$

式 (8.2) 可以很容易地积分得到 $u^2/2=\ln x-C$, 即

$$\ln x-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2=C \tag{8.3}$$

其中, C 为积分常数。

我们希望通过这个例子解答以下两个问题:

(1) 为什么 $u=y/x$ 可以分离变量?

(2) 如何解释式 (8.3) 中的常数 C 的自由度?

考虑变换

$$\hat{x}=\mathrm{e}^{\epsilon}x,\quad \hat{y}=\mathrm{e}^{\epsilon}y \tag{8.4}$$

其中, ϵ 为任意常数。在式 (8.4) 变换下, 式 (8.1) 在使用 $\hat{x}$ 和 $\hat{y}$ 分别代替 x,y 后的形式不变, 即

$$\frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}\hat{x}}=\frac{\hat{x}^2+\hat{y}^2}{\hat{x}\hat{y}}. \tag{8.5}$$

更进一步, 还可以由式 (8.4) 看出:

(1) $\epsilon = 0$ 有等价变换, $\hat{x} = x, \hat{y} = y$。

(2) $-\epsilon$ 对应反向或逆变换, $x = \mathrm{e}^{-\epsilon}\hat{x}, y = \mathrm{e}^{-\epsilon}\hat{y}$。

(3) 如何进一步变换 $x_2 = \mathrm{e}^{\delta}\hat{x}, y_2 = \mathrm{e}^{\delta}\hat{y}$, 这个乘积变换仍是在式 (8.4) 变换内, 原参数的变换指数是 $\epsilon + \delta$, 即 $x_2 = \mathrm{e}^{\epsilon+\delta}x, y_2 = \mathrm{e}^{\epsilon+\delta}y$。

比较以上 3 点与群的定义, 可以看到这是一个单参数变换群, 参数为 ϵ。有了群的概念就可以回到以上两个问题。

问题 (1) 解答: 式 (8.4) 可以使 $u = y/x$ 不变, 即

$$u(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{\hat{y}}{\hat{x}} = \frac{y}{x} = u(x, y) \tag{8.6}$$

这里的不变就是数学上的对称。这就是为什么可以分离变量的原因。

一般而言, 单参数变换群不变的微分方程都可以进行简化。如果方程是一阶微分方程就可以分离变量, 如果是二阶微分方程就可以降低一阶。

问题 (2) 解答: 在式 (8.4) 变换下, 方程的解式 (8.3) 变为

$$\ln \hat{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{y}}{\hat{x}}\right)^2 = C + \epsilon \tag{8.7}$$

这说明方程解中的任意常数 C 的自由度受到式 (8.4) 不变性的影响, 就是说式 (8.4) 改变式 (8.3) 的曲线, 式 (8.3) 与式 (8.7) 的曲线相差一个常数 ϵ。

例 8.2 现在有一个一阶的非线性齐次微分方程

$$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2}y \tag{8.8}$$

这是第二类 Abel 方程, 它在变换

$$\hat{x} = \mathrm{e}^{\epsilon}x, \quad \hat{y} = \mathrm{e}^{-\epsilon}y \tag{8.9}$$

下保持不变。由此可以取 $u = \hat{x}\hat{y} = xy$ 作为新的变量, 原方程变为

$$xu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u^2 - 3u + 2 \tag{8.10}$$

这个方程可以进一步改写为可以积分的形式

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{u\mathrm{d}u}{u^2 - 3u + 2} = \frac{u\mathrm{d}u}{(u-1)(u-2)} = \left(\frac{-1}{u-1} + \frac{2}{u-2}\right)\mathrm{d}u \tag{8.11}$$

积分并带回原参数后得

$$(xy - 2)^2 = Cx(xy - 1) \tag{8.12}$$

不像用于常微分方程, Lie 群用于偏微分方程是否成功取决于相应的边界条件。只有当方程和边界条件都不变时, 群方法才可以使用。如果边界条件的不变性得不到满足, 就会造成对称破缺问题, 这时一般不能求得精确解, 只能求数值

解。为了研究解的解析性质, 可以利用人造边界条件, 研究解的结构和性能, 协助数值计算。流体力学中的湍流问题对称性很难满足, 一般会产生对称破缺。下面的例子中, 方程和边界条件都满足不变性。

例 8.3 考虑一个一维热传导或扩散问题, 确定其源 $u(x,t)$ 的解

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad (t>0,-\infty<x<\infty) \tag{8.13}$$

这个问题的点源解就是要寻求在初始时间不为零的解

$$u(x,0)=u_0\delta(x) \tag{8.14}$$

其中, u_0 为常数, δ 为 Dirac 函数。

我们可以假设方程中的 x,t 和 u 按下面规律变换:

$$\hat{x}=\mathrm{e}^a x,\quad \hat{t}=\mathrm{e}^b t,\quad u_1=\mathrm{e}^c u \tag{8.15}$$

其中, a,b,c 为待定常数。把式 (8.15) 代入式 (8.13), 有

$$\mathrm{e}^{b-c}\frac{\partial u_1}{\partial \hat{t}}=\mathrm{e}^{2a-c}\frac{\partial^2 u_1}{\partial \hat{x}^2} \tag{8.16}$$

显然, 如果要保持不变性, 必须有 $2a-b=0$。如果取 $a=\epsilon$, 就有 $b=2\epsilon$。所以有变换

$$\hat{x}=\mathrm{e}^\epsilon x,\quad \hat{t}=\mathrm{e}^{2\epsilon} t,\quad u_1=\mathrm{e}^c u \tag{8.17}$$

目前, 参数 c 还不能确定, 这是偏微分方程, c 需要用边界或初始条件。根据 Dirac 函数的性质, 有 $\delta(\lambda x)=\lambda^{-1}\delta(x)$, 这样点源条件就变换为

$$u_1(\hat{x},0)=\mathrm{e}^c u(x,0)=\mathrm{e}^c u_0\delta(x)=\mathrm{e}^c u_0\delta(\mathrm{e}^{-a}\hat{x})=\mathrm{e}^{a+c}u_0\delta(\hat{x}) \tag{8.18}$$

为了保持以上条件的不变性①, 必须有 $c=-a=-\epsilon$, 所以这个偏微分方程的 Lie 群变换为

$$\hat{x}=\mathrm{e}^\epsilon x,\quad \hat{t}=\mathrm{e}^{2\epsilon} t,\quad u_1=\mathrm{e}^{-\epsilon} u \tag{8.19}$$

由以上的变换可以组成两个不变关系

$$u_1\sqrt{\hat{t}}=u\sqrt{t},\quad \frac{\hat{x}}{\sqrt{\hat{t}}}=\frac{x}{\sqrt{t}} \tag{8.20}$$

从这个关系可以看出, 原来的 3 个参数 x,t,u 满足两个不变关系, 可以通过引进两个变量 $\xi=t^{-1/2}x, v=t^{1/2}u$ (比原问题减少了一个), 就把偏微分方程简化为常微分方程。或者说问题的解可以写为函数关系 $v=\psi(\xi)$, 即

$$u=t^{-\frac{1}{2}}\psi(\xi)=t^{-\frac{1}{2}}\psi(t^{-\frac{1}{2}}x) \tag{8.21}$$

① 如果不是这样的条件, 可能造成对称破缺。

其中, ψ 为一个待定函数。将以上关系代入式 (8.13), 可以得到有关 ψ 对于 ξ 的常微分方程

$$2\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\xi^2}+\xi\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\xi}+\psi=0 \tag{8.22}$$

这个方程马上就可以积分为 $2\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}\xi+\xi\psi=2A$, 其中, A 为任意积分常数。这个方程可以继续积分, 得到

$$\psi(\xi)=A\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4}}\int^{\xi}\mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta+B\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4}} \tag{8.23}$$

其中, B 为另一个积分常数。由于解必须在 $\xi\to\infty$ 时为零, 所以 $A=0$, 这样就有

$$\psi(\xi)=B\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4}} \tag{8.24}$$

由式 (8.14) 有守恒关系

$$\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\mathrm{d}x=u_0 \tag{8.25}$$

这样就可以得到满足式 (8.14) 的解为

$$u(x,t)=u_0\frac{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}},\quad (t>0,-\infty<x<\infty) \tag{8.26}$$

这就是非常有名的热传导点源解, 是由 Fourier[1] 得到的。

这个例子一方面展示了方程和非零边界条件需要同时满足不变性如何求精确解, 另一个方面展示了含有两个变量的偏微分方程在有不变性的情况下可以简化成常微分方程求解。

8.2 单参数 Lie 群和 Lie 级数

在 (x,y) 平面, 设有变换

$$T_\epsilon:\hat{x}=\phi(x,y,\epsilon),\quad \hat{y}=\psi(x,y,\epsilon) \tag{8.27}$$

如果满足下面的性质, 就说变换 T_ϵ 是单参数连续变换群:

(1) 恒等式: 当 $\epsilon=0$ 时, 恒等变换

$$T_0:\hat{x}=\phi(x,y,0),\quad \hat{y}=\psi(x,y,0) \tag{8.28}$$

(2) 反向: 当 ϵ 变号为 $-\epsilon$ 时, 有反向变换

$$T_\epsilon:x=\phi(\hat{x},\hat{y},-\epsilon),\quad y=\psi(\hat{x},\hat{y},-\epsilon) \tag{8.29}$$

(3) 闭合: 设

$$T_\delta:x_2=\phi(\hat{x},\hat{y},\delta),\quad y_2=\psi(\hat{x},\hat{y},\delta) \tag{8.30}$$

那么这两个变换的乘积也属于式 (8.27), 而且变换指数为 $\epsilon+\delta$, 即

$$T_{\epsilon+\delta}: x_2=\phi(\hat{x},\hat{y},\delta)=\phi(x,y,\epsilon+\delta),\quad y_2=\psi(\hat{x},\hat{y},\delta)=\psi(x,y,\epsilon+\delta) \tag{8.31}$$

下面是几个单参数连续群的例子。

例 8.4 (1) 平移群: $\hat{x}=x+\epsilon,\hat{y}=y+\epsilon$。

(2) 拉伸群: $\hat{x}=\mathrm{e}^{\epsilon}x,\hat{y}=\mathrm{e}^{\epsilon}y$。

(3) 转动群: $\hat{x}=x\cos\epsilon-y\sin\epsilon,\hat{y}=x\sin\epsilon+y\cos\epsilon$。

(4) 投影变换: $\hat{x}=x/(1-\epsilon x)$, $\hat{y}=y/(1-\epsilon x)$.

我们可以验证它们都满足连续群的定义, 例如转动群, 即

(1) 当 $\epsilon=0$ 时, 转动群 $\hat{x}=x,\hat{y}=y$。

(2) 当 ϵ 变号为 $-\epsilon$ 时, 转动群 $x=\hat{x}\cos\epsilon+\hat{y}\sin\epsilon$, $y=-\hat{x}\sin\epsilon+\hat{y}\cos\epsilon$。

(3) 如果 $x_2=\hat{x}\cos\delta-\hat{y}\sin\delta$, $y_2=\hat{x}\sin\delta+\hat{y}\cos\delta$, 这样把 $\hat{x},\hat{y}$ 代入后得到

$$\begin{aligned}x_2&=(x\cos\epsilon-y\sin\epsilon)\cos\delta-(x\sin\epsilon+y\cos\epsilon)\sin\delta=x\cos(\epsilon+\delta)-y\sin(\epsilon+\delta)\\ y_2&=-x\sin(\epsilon+\delta)+y\cos(\epsilon+\delta)\end{aligned}$$

在式 (8.27) 中的 $\phi(x,y,\epsilon)$, $\psi(x,y,\epsilon)$ 一般称为连续群的整体形式 (global form)。对于小参数 ϵ, 可以在 $\epsilon=0$ 附近展开为

$$\hat{x}=x+\epsilon\frac{\mathrm{d}\hat{x}}{\mathrm{d}\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0}+O(\epsilon^2),\quad \hat{y}=y+\epsilon\frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0}+O(\epsilon^2) \tag{8.32}$$

其中, $O(\epsilon^2)$ 代表包括二阶小量在内的所有高阶展开量的总和。

如果引进函数 $\xi(x,y)$ 和 $\eta(x,y)$

$$\xi=\frac{\mathrm{d}\hat{x}}{\mathrm{d}\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0},\quad \eta=\frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} \tag{8.33}$$

那么将得到

$$\hat{x}=x+\epsilon\xi+O(\epsilon^2),\quad \hat{y}=y+\epsilon\eta+O(\epsilon^2) \tag{8.34}$$

这个在 $\epsilon=0$ 附近展开的式 (8.32) 称为变换群式 (8.27) 的无穷小形式 (infinitesimal form of the group)。

显然, 当 $\epsilon=0$ 时, 如果给定了连续群的无穷小形式, 就可以通过积分求得连续群的整体形式, 即

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}\hat{x}}{\mathrm{d}\epsilon}=\xi(\hat{x},\hat{y}),\quad \frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}\epsilon}=\eta(\hat{x},\hat{y})\\ \hat{x}=x,\quad \hat{y}=y\end{gathered} \tag{8.35}$$

8.3 无穷小生成元

设在平面 (x,y) 上定义一个函数 $f(x,y)$, 在式 (8.32) 的变换作用下, 变为其整体相似 $f(\hat{x},\hat{y})$。在 $\epsilon=0$ 附近展开, 可以得到

$$\begin{aligned} f(\hat{x},\hat{y}) &= f(x,y)+\epsilon Xf+\frac{1}{2!}\epsilon^2X^2f+\frac{1}{3!}\epsilon^3X^3f+\cdots+\frac{1}{n!}\epsilon^nX^nf+\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\epsilon^nX^nf \end{aligned} \tag{8.36}$$

这个级数称为 Lie 级数。其中, X 称为无穷小生成元① (infinitesimal generator), 定义为

$$X=\xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{8.37}$$

Lie 级数可以表示为

$$f(\hat{x},\hat{y})=\mathrm{e}^{\epsilon X}f(x,y) \tag{8.38}$$

其中, $\mathrm{e}^{\epsilon X}=\sum_{n=0}^{\infty}(1/n!)\epsilon^nX^n$ 是一个算子。

如果在式 (8.38) 中分别取 $f(\hat{x},\hat{y})$ 为 $\hat{x}$ 和 $\hat{y}$, 可以得到

$$\hat{x}=e^{\epsilon X}x,\quad \hat{y}=e^{\epsilon X}y \tag{8.39}$$

将式 (8.38) 和式 (8.39) 结合, 可以得到非常重要的关系

$$f(e^{\epsilon X}x,e^{\epsilon X}y)=e^{\epsilon X}f(x,y) \tag{8.40}$$

这个关系称为 Lie 群的恒等式。

还可以得到以下恒等式

$$Xx=\xi \tag{8.41}$$

$$Xy=\eta \tag{8.42}$$

$$Xf(x,y)=(Xx)\frac{\partial f}{\partial x}+(Xy)\frac{\partial f}{\partial y} \tag{8.43}$$

对于例 (8.4) 采用无穷小生成元形式的定义, 可以得到

$$\text{平移群}:\xi=1,\eta=1,\ \text{对应的无穷小生成元为}\ X=\partial/\partial x+\partial/\partial y \tag{8.44}$$

$$\text{拉伸群}:\xi=x,\eta=y,\ \text{对应的无穷小生成元为}\ X=x\partial/\partial x+y\partial/\partial y \tag{8.45}$$

$$\text{转动群}:\xi=-y,\eta=x,\ \text{对应的无穷小生成元为}\ X=-y\partial/\partial x+x\partial/\partial y \tag{8.46}$$

$$\text{投影变换 1}:\xi=x^2,\eta=xy,\ \text{对应的无穷小生成元为}\ X=x^2\partial/\partial x+xy\partial/\partial y \tag{8.47}$$

$$\text{投影变换 2}:\xi=xy,\eta=y^2,\ \text{对应的无穷小生成元为}\ X=xy\partial/\partial x+y^2\partial/\partial y \tag{8.48}$$

① 文献中有时使用 A,B,U 或 X, 这里用 X 表示。

例 8.5 将以上概念应用于平移群、拉伸群和转动群, 得到相应的无穷小生成元。

(1) 平移群: $X = \partial/\partial x + \partial/\partial y$, 以及 $Xx = 1,\ Xy = 1$。

(2) 拉伸群: $X = x\partial/\partial x + y\partial/\partial y$, 以及 $Xx = x,\ Xy = y$。

(3) 转动群: $X = -y\partial/\partial x + x\partial/\partial y$, 以及 $Xx = -y,\ Xy = x$。

8.4 正则坐标

可以通过引进变量 u, v 对无穷小生成元X 进行变换。设坐标变换 $(x, y) \mapsto (u, v)$

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \tag{8.49}$$

这样就有全微分

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v \\
&= \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\right) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}y
\end{aligned} \tag{8.50}$$

比较两边的微分系数, 就可以得到变换关系

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v} \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial v}
\end{aligned} \tag{8.51}$$

将微分变换式 (8.51) 代入式 (8.37) 可得到

$$\begin{aligned}
X &= \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} \\
&= \xi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v}\right) + \eta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial v}\right) \\
&= \left(\xi\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial u} + \left(\xi\frac{\partial v}{\partial x} + \eta\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial v} \\
&= (Xu)\frac{\partial}{\partial u} + (Xv)\frac{\partial}{\partial v}
\end{aligned} \tag{8.52}$$

如果我们令参数 u, v 的选择满足下列条件

$$\begin{aligned}
Xu &= \xi\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\
Xv &= \xi\frac{\partial v}{\partial x} + \eta\frac{\partial v}{\partial y} = 1
\end{aligned} \tag{8.53}$$

这样就把无穷小生成元 X 简化为

$$X = \frac{\partial}{\partial v} \tag{8.54}$$

这样的 u, v 就称为正则坐标。

为了便于表达, 后面使用以下符号 $\partial/\partial x = \partial_x$, 这样就有

$$X = \xi\partial_x + \eta\partial_y \tag{8.55}$$

8.5 不变性或对称性

由式 (8.36) 可以看出, 如果 $Xf(x,y) = 0$, 那么 $f(x,y)$ 在 $(x,y) \mapsto (\hat{x},\hat{y})$ 的变换下保持不变, 就是保持对称 (不变意味着对称), 即有以下定理:

定理 8.1 (对称性定理) *在 Lie 群 Xf 的变换下, $f(x,y)$ 保持不变的充分必要条件是 $Xf = 0$。或者说在 $Xf = 0$ 的条件下, 一定有 $f(\hat{x},\hat{y}) = f(x,y)$。*

这个定理是说 $f(x,y)$ 不变的充分必要条件是在无穷小生成元的变换下保持不变。即

$$[f(\hat{x},\hat{y}) - f(x,y)]|_{Xf(x,y)} = 0 \tag{8.56}$$

$$Xf(x,y)|_{f(\hat{x},\hat{y})=f(x,y)} = 0 \tag{8.57}$$

Lie 群对称性分析的一个非常重要的问题就是寻找方程的无穷小生成元。

保持不变的条件

$$Xf = \xi(x,y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{8.58}$$

对应的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\xi} = \frac{\mathrm{d}y}{\eta} = \frac{\mathrm{d}f}{0} \tag{8.59}$$

这个方程对应的不变性解是 $f(x,y)$ 为常数。

由这个方程还可以通过积分, 获得其特解, 作为不变量, 用于简化原方程。这个不变量的方法适用于任何阶数的常微分方程和偏微分方程。下面的几乎所有的例子的求解都是首先通过 Lie 群导出无穷小生成元, 然后寻找问题的不变量, 把不变量作为新的因变量和自变量, 简化方程, 以便达到求解的目的。

在群论中, 对称性即不变性是个核心概念, 除了在数学中有重要作用, 在其他学科中也非常重要。

8.6 无穷小生成元的延拓和对称性

由以上分析已经得到了 x, y 在 Lie 群变换下的关系和对称性, 并得到无穷小生成元 [式 (8.37)] 和不变性定理。对于微分方程, 这样的变换还不够, 还需要对因变量的一阶导数、二阶导数和多阶导数进行变换, 寻找对应的生成元。

对于一阶导数, 我们就是需要寻找 $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x \mapsto \hat{y}' = \mathrm{d}\hat{y}/\mathrm{d}\hat{x}$。包括一阶导数的整体变换可以写为

$$T_\epsilon : \hat{x} = \phi(x, y, \epsilon), \quad \hat{y} = \psi(x, y, \epsilon), \quad \hat{y}' = \frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}\hat{x}} = \chi(x, y, y', \epsilon) \tag{8.60}$$

这个变换称为一次延拓群 $T^{(1)}$, 其中最后一个关系

$$\chi(x, y, y', \epsilon) \equiv \frac{D\psi}{D\phi} = \frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}y'}{\dfrac{\partial\phi}{\partial x} + \dfrac{\partial\phi}{\partial y}y'} \tag{8.61}$$

称为变换式 (8.27) 的延拓, $D\psi$ 是 ψ 对 x, y 的全微分, 它的定义为

$$D = \partial_x + y'\partial_y \tag{8.62}$$

对于一阶导数的延拓称为一次延拓, 记为 $X^{(1)}$。

显然, 直接确定这个整体变换不易, 可以仿照以上无穷小生成元, 从局部做起。可以在无穷小的参数附近展开, 省略所有 $O(\epsilon)$ 的二阶项, 并考虑到 $\hat{x} \approx x + \epsilon\xi, \hat{y} \approx y + \epsilon\eta$, 得到

$$\begin{aligned} D\psi &= D\hat{y} = D(y + \epsilon\eta) = y' + \epsilon D(\eta) \\ D\phi &= D\hat{x} = D(x + \epsilon\xi) = x' + \epsilon D(\xi) \end{aligned} \tag{8.63}$$

这里使用了变量 x, y 相互独立的观点, 所以有 $\partial_x y = 0$。这样就可以得到

$$\begin{aligned} \chi(x, y, y', \epsilon) &\approx \frac{y' + \epsilon D(\eta)}{x' + \epsilon D(\xi)} \approx [y' + \epsilon D(\eta)][1 - \epsilon D(\xi)] \\ &\approx y' + [D(\eta) - y'D(\xi)]\epsilon \equiv y' + \epsilon\eta_1 \end{aligned} \tag{8.64}$$

这样就有变换

$$f(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}') = f(x, y, y') + \epsilon X^{(1)} f(x, y, y') + O(\epsilon^2) \tag{8.65}$$

因此, 一次延拓群 $T^{(1)}$ 的生成元, 即无穷小生成元的一次延拓 $X^{(1)}$ 为

$$X^{(1)} = X + \eta_1 \frac{\partial}{\partial y'} = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \eta_1\partial_{y'} \tag{8.66}$$

其中记号

$$\eta_1 = D(\eta) - y'D(\xi) = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y(y')^2 \tag{8.67}$$

$\eta_x = \partial\eta/\partial x, \eta_y = \partial\eta/\partial y$。下面都这样表示, 以便简化表达式。对于一次延拓, 有对称性条件

$$X^{(1)} f(x, y, y') = \xi\partial_x f + \eta\partial_y f + \eta_1\partial_{y'} f = 0 \tag{8.68}$$

对称性条件的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\xi}=\frac{\mathrm{d}y}{\eta}=\frac{\mathrm{d}y'}{\eta_1}=\frac{\mathrm{d}f}{0} \tag{8.69}$$

用类似的方法, 可以确定对应于二阶导数变换的二次延拓群 $T^{(2)}$ 的生成元, 即无穷小生成元的二次延拓

$$f(\hat{x},\hat{y},\hat{y}',\hat{y}'')=f(x,y,y',y'')+\epsilon X^{(2)}f(x,y,y',y'')+O(\epsilon^2) \tag{8.70}$$

这样, 二次延拓群 $T^{(2)}$ 的生成元, 即无穷小生成元的二次延拓$X^{(2)}$ 为

$$X^{(2)}=X^{(1)}+\eta_2\frac{\partial}{\partial y''}=\xi\partial_x+\eta\partial_y+\eta_1\partial_{y'}+\eta_2\partial_{y''} \tag{8.71}$$

其中记号

$$\begin{aligned}\eta_2&=D(\eta_1)-y''D(\xi)\\&=\eta_{xx}+(2\eta_{xy}-\xi_{xx})y'+(\eta_{yy}-2\xi_{xy})(y')^2-\xi_{yy}(y')^3+\\&\quad(\eta_y-2\xi_x-3y'\xi_y)y''\end{aligned} \tag{8.72}$$

对于二次延拓, 有对称性条件

$$X^{(2)}f(x,y,y',y'')=\xi\partial_x f+\eta\partial_y f+\eta_1\partial_{y'}f+\eta_2\partial_{y''}f=0 \tag{8.73}$$

对称性条件的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\xi}=\frac{\mathrm{d}y}{\eta}=\frac{\mathrm{d}y'}{\eta_1}=\frac{\mathrm{d}y''}{\eta_2}=\frac{\mathrm{d}f}{0} \tag{8.74}$$

同样, 可以推导出三次无穷小生成元的延拓

$$f(\hat{x},\hat{y},\hat{y}',\hat{y}'',\hat{y}''')=f(x,y,y',y'',y''')+\epsilon X^{(3)}f(x,y,y',y'',y''')+O(\epsilon^2) \tag{8.75}$$

这样, 三次延拓群 $T^{(3)}$ 的生成元, 即无穷小生成元的三次延拓$X^{(3)}$ 为

$$X^{(3)}=X^{(2)}+\eta_3\frac{\partial}{\partial y'''}=\xi\partial_x+\eta\partial_y+\eta_1\partial_{y'}+\eta_2\partial_{y''}+\eta_3\partial_{y'''} \tag{8.76}$$

其中记号

$$\begin{aligned}\eta_3&=D(\eta_2)-y'''D(\xi)\\&=\eta_{xxx}+(3\eta_{xxy}-\xi_{xxx})y'+\\&\quad3(\eta_{xyy}-\xi_{xxy})(y')^2+(\eta_{yyy}-3\xi_{xyy})(y')^3-\xi_{yyy}(y')^4+\\&\quad3[\eta_{xy}-\xi_{xx}+(\eta_{yy}-3\xi_{xy})y'-2\xi_{xy}(y')^2]y''-\\&\quad3\xi_y(y'')^2+(\eta_y-3\xi_x-4\xi_y y')y'''\end{aligned} \tag{8.77}$$

对于三次延拓, 有对称性条件

$$X^{(3)}f(x,y,y',y'',y''')=\xi\partial_x f+\eta\partial_y f+\eta_1\partial_{y'}f+\eta_2\partial_{y''}f+\eta_3\partial_{y'''}f=0 \tag{8.78}$$

对称性条件的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\xi}=\frac{\mathrm{d}y}{\eta}=\frac{\mathrm{d}y'}{\eta_1}=\frac{\mathrm{d}y''}{\eta_2}=\frac{\mathrm{d}y'''}{\eta_3}=\frac{\mathrm{d}f}{0} \tag{8.79}$$

推导四次无穷小生成元的延拓, 有

$$\begin{aligned}f(\hat{x},\hat{y},\hat{y}',\hat{y}'',\hat{y}''',\hat{y}'''')=&f(x,y,y',y'',y''',y'''')+\\&\epsilon X^{(4)}f(x,y,y',y'',y''',y'''')+O(\epsilon^2)\end{aligned} \tag{8.80}$$

这样, 四次延拓群 $T^{(4)}$ 的生成元, 即无穷小生成元的四次延拓$X^{(4)}$ 为

$$X^{(4)}=X^{(3)}+\eta_4\frac{\partial}{\partial y''''}=\xi\partial_x+\eta\partial_y+\eta_1\partial_{y'}+\eta_2\partial_{y''}+\eta_3\partial_{y'''}+\eta_4\partial_{y''''} \tag{8.81}$$

其中记号

$$\begin{aligned}\eta_4=&D(\eta_3)-y''''D(\xi)\\=&\eta_{xxxx}+(4\eta_{xxxy}-\xi_{xxxx})y'+(6\eta_{xxyy}-4\xi_{xxxy})(y')^2+\\&(4\eta_{xyyy}-6\xi_{xxyy})(y')^3+(\eta_{yyyy}-4\xi_{xyyy})(y')^4-(y')^5\xi_{yyyy}+\\&[6\eta_{xxy}-4\xi_{xxx}+(12\eta_{xyy}-18\xi_{xxy})y'+\\&(6\eta_{yyy}-24\xi_{xyy})(y')^2-10(y')^3\xi_{yyy}]y''+\\&(3\eta_{yy}-12\xi_{xy}-15\xi_{yy}y')(y'')^2+\\&[4\eta_{xy}-6\xi_{xx}+(4\eta_{yy}-16\xi_{xy})y'-10(y')^2\xi_{yy}-10\xi_y y'']y'''+\\&(\eta_y-4\xi_x-5\xi_y y')y''''\end{aligned} \tag{8.82}$$

对于四次延拓, 有对称性条件

$$\begin{aligned}X^{(4)}f(x,y,y',y'',y''',y'''')=&\xi\partial_x f+\eta\partial_y f+\eta_1\partial_{y'}f+\eta_2\partial_{y''}f+\\&\eta_3\partial_{y'''}f+\eta_4\partial_{y''''}f=0\end{aligned} \tag{8.83}$$

对称性条件的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\xi}=\frac{\mathrm{d}y}{\eta}=\frac{\mathrm{d}y'}{\eta_1}=\frac{\mathrm{d}y''}{\eta_2}=\frac{\mathrm{d}y'''}{\eta_3}=\frac{\mathrm{d}y''''}{\eta_4}=\frac{\mathrm{d}f}{0} \tag{8.84}$$

k 次延拓一般可以写为

$$\begin{aligned}f[\hat{x},\hat{y},\hat{y}',\hat{y}'',\hat{y}''',\cdots,\hat{y}^{(k)}]=&f[x,y,y',y'',y''',\cdots,y^{(k)}]+\\&\epsilon X^{(k)}f[x,y,y',y'',y''',\cdots,y^{(k)}]+O(\epsilon^2)\end{aligned} \tag{8.85}$$

这样, k 次延拓群 $T^{(k)}$ 的生成元, 即无穷小生成元的 k 次延拓为

$$X^{(k)} = X^{(k-1)} + \eta_k \partial_{y^{(k)}} \tag{8.86}$$

其中, $\eta_k = D[\eta_{(k-1)}] - y^{(k)} D(\xi)$。或展开为

$$X^{(k)} = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \eta_1\partial_{y'} + \eta_2\partial_{y''} + \cdots + \eta_k\partial_{y^{(k)}}$$

其中, $k > 1$。对于 k 次延拓, 有对称性条件

$$\begin{aligned} X^{(k)} f[x, y, y', y'', \cdots, y^{(k)}] = \xi\partial_x f + \eta\partial_y f + \eta_1\partial_{y'} f + \\ \eta_2\partial_{y''} f + \cdots + \eta_k\partial_{y^{(k)}} f = 0 \end{aligned} \tag{8.87}$$

对称性条件的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\xi} = \frac{\mathrm{d}y}{\eta} = \frac{\mathrm{d}y'}{\eta_1} = \frac{\mathrm{d}y''}{\eta_2} = \cdots = \frac{\mathrm{d}y^{(k)}}{\eta_k} = \frac{\mathrm{d}f}{0} \tag{8.88}$$

一般地, 有以下定理:

定理 8.2 在 Lie 群 $X^{(k)} f$ 变换下, $f[x, y, \cdots, y^{(k)}]$ 保持不变的充分必要条件是 $X^{(k)} f = 0$, 或者说在 $X^{(k)} f = 0$ 的条件下, 一定有 $f[\hat{x}, \hat{y}, \cdots, \hat{y}^{(k)}] = f[x, y, \cdots, y^{(k)}]$。

这个定理是说 $f[x, y, \cdots, y^{(k)}]$ 不变的充分必要条件是在 k 次无穷小生成元延拓的变换下保持不变。

第九章

微分方程的对称性和 Lie 群对称性决定方程

现在让我们来研究方程的对称性, 以便可以将以上成果应用到微分方程的求解过程中。

有一个 n 阶微分方程

$$F[x, y, \cdots, y^{(n)}] = y^{(n)} - \omega[x, y, \cdots, y^{(n-1)}] \tag{9.1}$$

其中, $y(n) \equiv \mathrm{d}^{(n)}/\mathrm{d}x^{(n)}$, 并设 ω 是局部处处光滑的函数。以及一个 n 次的 Lie 群变换

$$T^{(n)} : [x, y, \cdots, y^{(n)}] \mapsto [\hat{x}, \hat{y}, \cdots, \hat{y}^{(n)}] \tag{9.2}$$

定理 9.1 *式 (9.1) 对称的充分必要条件是其无穷小生成元的 n 次延拓作用到方程后为零, 即当 $y^{(k)} = \omega[x, y, \cdots, y^{(n-1)}]$ 时*

$$X^{(n)}\{y^{(k)} - \omega[x, y, \cdots, y^{(n-1)}]\} = 0 \tag{9.3}$$

对于给定的 ω, 通过式 (9.3) 就可以计算出给定方程的对称性, 故式 (9.3) 称为 Lie 群对称性决定方程。下面给出一阶和二阶微分方程的决定方程, 就是用来确定无穷小生成元矢量坐标 ξ, η 的方程。

定理 9.2 不同次的无穷小生成元延拓之间有以下恒等关系:

$$
\begin{aligned}
&[X_1^{(1)}X_2^{(1)}]f \equiv (X_1X_2)^{(1)}f \\
&[X_1^{(n)}X_2^{(n)}]f \equiv (X_1X_2)^{(n)}f, \quad n=1,2,3,\cdots
\end{aligned}
\tag{9.4}
$$

9.1 一阶微分方程的决定方程

当 $n=1$ 时, 有微分方程

$$
F(x,y,y') = y' - \omega(x,y) = 0 \tag{9.5}
$$

此时, 由式 (8.66) 得到无穷小生成元的一次延拓的展开式

$$
\begin{aligned}
X^{(1)} &= X + \eta_1\partial_{y'} = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \eta_1\partial_{y'} \\
&= \xi\partial_x + \eta\partial_y + [\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - (y')^2\xi_y]\partial_{y'}
\end{aligned}
\tag{9.6}
$$

利用定理 (9.1), 就有一阶微分方程的对称性决定方程

$$
\begin{aligned}
&X^{(1)}F(x,y,y') \\
=& X^{(1)}[y' - \omega(x,y)] = (\xi\partial_x + \eta\partial_y + \eta_1\partial_{y'})\,[y' - \omega(x,y)] \\
=& \left\{\xi\partial_x + \eta\partial_y + [\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - (y')^2\xi_y]\partial_{y'}\right\}[y' - \omega(x,y)] = 0
\end{aligned}
\tag{9.7}
$$

注意到 x, y, y' 是相互独立的变量, 用 ω 代替 y' 后简化为

$$
\begin{aligned}
&X^{(1)}[y' - \omega(x,y)] \\
=& (\xi\partial_x + \eta\partial_y + \eta_1\partial_{y'})\,[y' - \omega(x,y)] \\
=& \left\{\xi\partial_x + \eta\partial_y + [\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - (y')^2\xi_y]\partial_{y'}\right\}[y' - \omega(x,y)] \\
=& -\xi\omega_x - \eta\omega_y + \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - (y')^2\xi_y = 0
\end{aligned}
\tag{9.8}
$$

注意到 $y' = w$, 从而得到一阶微分方程的对称性决定方程

$$
\xi\omega_x + \eta\omega_y = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)\omega - \omega^2\xi_y \tag{9.9}
$$

在给定 ω 的情况下就可以确定 ξ, η。表 9.1 列出一些一阶微分方程的不变群。

许多类型的微分方程的对称性都已经被研究, 可以参考 Ibragimov 的书[80]。

表 9.1 一些一阶微分方程的不变群

方程	ξ	η
$y_x=\omega(y)$	1	0
$y_x=\omega(x)$	0	1
$y_x=\omega(ax+by)$	b	$-a$
$y_x=\omega\left(\frac{y}{x}\right)$	x	y
$xy_x=\omega(x\mathrm{e}^{-y})$	x	1
$xy_x=y+\omega\left(\frac{y}{x}\right)$	x^2	xy
$y_x=\frac{y}{x+\omega(y)}$	y	0
$y_x=\frac{y}{x+\omega\left(\frac{y}{x}\right)}$	xy	y^2

9.2 二阶微分方程的决定方程

当 $n=2$ 时, 有微分方程

$$F(x,y,y',y'')=y''-\omega(x,y,y')=0 \tag{9.10}$$

此时, 由式 (8.71) 得到无穷小生成元的二次延拓的展开式

$$\begin{aligned}X^{(2)}&=X^{(1)}+\eta_2\partial_{y''}=\xi\partial_x+\eta\partial_y+\eta_1\partial_{y'}+\eta_2\partial_{y''}\\&=\xi\partial_x+\eta\partial_y+[\eta_x+(\eta_y-\xi_x)y'-(y')^2\xi_y]\partial_{y'}+\eta_2\partial_{y''}\end{aligned} \tag{9.11}$$

利用定理 (9.1), 就有二阶微分方程的对称性决定方程

$$X^{(2)}F(x,y,y',y'')=X^{(2)}[y''-\omega(x,y,y')]=0 \tag{9.12}$$

注意到 x,y,y',y'' 是相互独立的变量, 用 ω 代替 y'' 后简化得到二阶微分方程的对称性决定方程

$$\begin{aligned}&\eta_{xx}+(2\eta_{xy}-\xi_{xx})y'+(\eta_{yy}-2\xi_{xy})(y')^2-\\&(y')^3\xi_{yy}+(\eta_y-2\xi_x-3\xi_y y')\omega\\=&\ \xi\omega_x+\eta\omega_y+[\eta_x+(\eta_y-\xi_x)y'-(y')^2\xi_y]\omega_{y'}\end{aligned} \tag{9.13}$$

这个方程看起来非常复杂, 其实实际情况比较简单。ω 是已知的, ξ 和 η 是未知的, 需要确定。通过比较公式两边的有关 y' 的幂次同类项系数, 就可以确定 ξ,η。由于左边包括 x,y,y' 三个独立变量, 这样决定方程数多于变量数, 属于过分确定性问题。

许多类型的二阶微分方程的对称性也都已经被研究, 表 9.2 列出一些二阶微分方程的不变群。可以参考 Ibragimov 的书[80]。

表 9.2 一些二阶微分方程的不变群

方程	ξ	η
$y_{xx}=\omega(y,y_x)$	1	0
$y_{xx}=\omega(x,y_x)$	0	1
$y_{xx}=\omega(ax+by,y_x)$	b	$-a$
$y_{xx}=\omega(x,y-xy_x)$	0	x
$xy_{xx}=\omega\left(\frac{y}{x},y_x\right)$	x	y
$x^3y_{xx}=\omega\left(\frac{y}{x},y-xy_x\right)$	x^2	xy
$y_{xx}=y\omega\left(y\mathrm{e}^{-x},\frac{y_x}{y}\right)$	1	y
$y_{xx}=y_x^3\omega\left(y,\frac{y-xy_x}{y_x}\right)$	y	0

下面通过几个例子介绍如何确定对称性的 ξ 和 η。

例 9.1 有二阶微分方程[78,80]

$$y''=\mathrm{e}^y-x^{-1}y' \tag{9.14}$$

求这个方程的对称性, 即确定 $X=\xi\partial_x+\eta\partial_y$ 中的 ξ 和 η。

对于这个方程, $\omega=\mathrm{e}^y-x^{-1}y'$, 这样就有 $\omega_x=x^{-2}y',\omega_y=\mathrm{e}^y,\omega_{y'}=-x^{-1}$, 将它们代入式 (9.13) 就得到本问题的决定方程

$$\begin{aligned}&\eta_{xx}+(2\eta_{xy}-\xi_{xx})y'+(\eta_{yy}-2\xi_{xy})(y')^2-(y')^3\xi_{yy}+\\&(\eta_y-2\xi_x-3\xi_yy')(\mathrm{e}^y-x^{-1}y')+\\&x^{-1}[\eta_x+(\eta_y-\xi_x)y'-(y')^2\xi_y]-\xi x^{-2}y'-\eta\mathrm{e}^y=0\end{aligned} \tag{9.15}$$

从这个方程可以看出, 左边是 y' 的三次多项式。通过令 y' 各幂次前的系数为零, 就可以分解为 4 个方程

$$(y')^3:\xi_{yy}=0 \tag{9.16}$$

$$(y')^2:\eta_{yy}-2\xi_{xy}+2x^{-1}\xi_y=0 \tag{9.17}$$

$$y':2\eta_{xy}-\xi_{xx}+\left(\frac{\xi}{x}\right)_x-3\xi_y\mathrm{e}^y=0 \tag{9.18}$$

$$(y')^0:\eta_{xx}+x^{-1}\eta_x+(\eta_y-2\xi_x-\eta)\mathrm{e}^y=0 \tag{9.19}$$

式 (9.16) 和式 (9.17) 对 y 积分, 得到

$$\begin{aligned}\xi&=p(x)y+a(x)\\\eta&=\left(p'-\frac{p}{x}\right)y^2+q(x)y+b(x)\end{aligned} \tag{9.20}$$

把式 (9.20) 代入式 (9.18) 和式 (9.19), 可以观察到 ξ, η 是 y 的多项式。但由于这两个方程都含有 e^y, 为了幂次平衡, e^y 的系数必须为零, 即

$$\begin{aligned} \xi_y &= 0 \\ \eta_y - 2\xi_x - \eta &= 0 \end{aligned} \tag{9.21}$$

由这两个方程可以给出

$$\begin{aligned} \xi &= a(x) \\ \eta &= -2a'(x) \end{aligned} \tag{9.22}$$

把这个关系代入式 (9.18), 有

$$\left(a' - \frac{a}{x}\right)' = 0 \tag{9.23}$$

积分后得到

$$a = C_1 x \ln x + C_2 x \tag{9.24}$$

式 (9.19) 给出同样的结果, 这样就有对称参数

$$\xi = C_1 x \ln x + C_2 x, \quad \eta = -2[C_1(1 + \ln x) + C_2] \tag{9.25}$$

其中包括两个任意常数 C_1, C_2。这样式 (9.14) 的无穷小生成元为

$$\begin{aligned} X &= \xi\partial_x + \eta\partial_y \\ &= (C_1 x \ln x + C_2 x)\partial_x - 2[C_1(1 + \ln x) + C_2]\partial_y \\ &= C_1 X_1 + C_2 X_2 \end{aligned} \tag{9.26}$$

其中

$$\begin{gathered} X_1 = \xi_1\partial_x + \eta_1\partial_y, \quad X_2 = \xi_2\partial_x + \eta_2\partial_y \\ \xi_1 = x\ln x, \quad \eta_1 = -2(1 + \ln x) \\ \xi_2 = x, \quad \eta_2 = -2 \end{gathered} \tag{9.27}$$

这个方程的无穷小生成元是两个算子的线性组合, 这表明该方程有两个线性无关解, 每一个算子对应一个解。如果把 X_1, X_2 作为二维算子空间 (流形) 的基, 那么 X 就可以看作在这个二维流形上的展开。

例 9.2 现有一最简单的二阶微分方程[82]

$$y'' = 0 \tag{9.28}$$

确定方程的对称性, 即确定 $X = \xi\partial_x + \eta\partial_y$ 中的 ξ 和 η。

由于此时 $\omega = 0$, 所以决定方程就变为

$$\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})(y')^2 - \xi_{yy}(y')^3 = 0 \tag{9.29}$$

把 y' 作为一个独立变量, 在上式中比较 y' 之前的系数, 得到

$$\eta_{xx}=0,\quad 2\eta_{xy}-\xi_{xx}=0,\quad \eta_{yy}-2\xi_{xy}=0,\quad \xi_{yy}=0 \tag{9.30}$$

由式 (9.30) 的最后一个方程, 对于任意的 $a(x)$, $b(x)$ 可得

$$\xi=a(x)y+b(x) \tag{9.31}$$

将此式代入式 (9.30) 的第三个方程可得

$$\eta=a'(x)y^2+c(x)y+d(x) \tag{9.32}$$

其中, $c(x), d(x)$ 也是任意函数。将这两个表达式代入式 (9.30) 的第一和第二个方程, 得到

$$a'''(x)y^2+c''(x)y+d''(x)=0,\quad 3ya''(x)+2c'(x)-b''(x)=0 \tag{9.33}$$

比较 y 的系数, 可以得到

$$a''(x)=0,\quad c''(x)=0,\quad d''(x)=0,\quad b''(x)=2c'(x) \tag{9.34}$$

对以上方程进行积分, 从而得到对称性系数

$$\xi=c_1+c_3x+c_5y+c_7x^2+c_8xy,\quad \eta=c_2+c_4y+c_6x+c_7xy+c_8y^2 \tag{9.35}$$

其中, 系数 c_k 为常数。这样就得到问题的一般无穷小生成元

$$X^{(2)}=\sum_{k=1}^{8}c_kX_k \tag{9.36}$$

其中

$$\begin{gathered}X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=x\partial_x,\quad X_4=y\partial_y,\quad X_5=y\partial_x\\ X_6=x\partial_y,\quad X_7=x^2\partial_x+xy\partial_y,\quad X_8=xy\partial_x+y^2\partial_y\end{gathered} \tag{9.37}$$

可见, 二阶的微分方程 $y''=0$ 有 8 个无穷小生成元, 即有 8 种 Lie 对称性。可以证明二阶的常微分方程最多只能有 8 个对称性。利用式 (8.44)、式 (8.45)、式 (8.47) 和式 (8.48) 还可以看出, X_1, X_2 是平移群, X_3, X_4, X_5, X_6 是拉伸群, X_7, X_8 是投影变换群。

根据 Lie 群, 在 $y''=0$ 的情况下, 必有 $X^{(2)}y''\equiv 0$, 由于 $X^{(2)}$ 是 X_k 的线性组合, 所以必然也有 $X_ky''\equiv 0$ 成立。如果把 X_k 看作向量基, 8 个 X_k 展开为一个八维向量空间, 二次延拓$X^{(2)}$ 就是其中的一个线性组合。

例 9.3 在研究游动微生物时, 可以导出以下形式的二阶非线性常微分方程[82]

$$y'' = \frac{(y')^2}{y} - y^2 \tag{9.38}$$

确定这个方程的 Lie 群。

把 $\omega(x, y, y') = (y')^2/y - y^2$ 代入决定方程 (9.13), 得到关于 y' 的多项式为

$$\begin{aligned}
&\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})(y')^2 - (y')^3\xi_{yy} + \\
&(\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y')\left[\frac{(y')^2}{y} - y^2\right] \\
=\ &\eta\left[-\frac{(y')^2}{y^2} - 2y\right] + \frac{[\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2](2y')}{y}
\end{aligned} \tag{9.39}$$

比较 y' 的系数, 得到

$$\xi_y + \frac{\xi_y}{y} = 0 \tag{9.40}$$

$$\eta_{yy} - 2\xi_{xy} - \frac{\eta_y}{y} + \frac{\eta}{y^2} = 0 \tag{9.41}$$

$$2\eta_{xy} - \xi_{xx} + 3y^2\xi_y - \frac{2\eta_x}{y} = 0 \tag{9.42}$$

$$\eta_{xx} - y^2(\eta_y - 2\xi_x) + 2y\eta = 0 \tag{9.43}$$

对式 (9.41) 进行积分得到

$$\xi = a(x)\ln|y| + b(x) \tag{9.44}$$

对式 (9.42) 进行积分得到

$$\eta = a'(x)y(\ln|y|)^2 + c(x)\ln|y| + d(x)y \tag{9.45}$$

把式 (9.44) 和式 (9.45) 代入式 (9.42) 中, 有

$$3a''(x)\ln|y| + 3a(x)y + 2c'(x) - b''(x) = 0 \tag{9.46}$$

比较 y 的系数, 有

$$a(x) = 0, \quad b''(x) = 2c'(x) \tag{9.47}$$

再将式 (9.44) 和式 (9.45) 代入式 (9.43), 有

$$c(x)y^2\ln|y| + c''(x)y\ln|y| + [2b'(x) - c(x) + d(x)]y^2 + d''(x)y = 0 \tag{9.48}$$

比较 y 的系数, 可得

$$c(x) = 0, \quad d(x) = -2b'(x), \quad d''(x) = 0 \tag{9.49}$$

考虑到式 (9.47), 得到 $b(x)=c_1+c_2x, d(x)=-2c_2$, 这样就可以得到问题的切向量

$$\xi=c_1+c_2x, \quad \eta=-2c_2y \tag{9.50}$$

从而问题的 Lie 群为

$$X=c_1X_1+c_2X_2, \quad 其中X_1=\partial_x, X_2=x\partial_x-2y\partial_y \tag{9.51}$$

如果用 $\mathcal{L}$ 代表一个微分方程的所有无穷小生成元的集合, 即 $X_i\in\mathcal{L}$, 这样 X_i 就是 $\mathcal{L}$ 的向量基。显然, 对于常数 $c_i\in\mathbf{R}$, 线性组合 $c_iX_i\in\mathcal{L}$, 这样 $\mathcal{L}$ 就是一个向量空间。$\mathbf{R}$ 的维数 R 就是对称性条件中的任意常数的个数。

这样, 每个无穷小生成元$X\in\mathcal{L}$ 都可以表示为

$$X=\sum_{i=1}^{R}c_iX_i=c_iX_i, \quad c_i\in\mathbf{R} \tag{9.52}$$

由所有 $X\in\mathcal{L}$ 生成的对称集合构成 R 个参数的 (局部) Lie 群, 称为由 $\mathcal{L}$ 生成的群。

有关 $\mathbf{R}$ 的维数 R 有如下结论: 对于阶数 $n=2$ 的常微分方程, R 一般是 $0,1,2,3$ 或 8, 只有当常微分方程是线性的时候才有 $R=8$。对于阶数 $n\geqslant 3$ 的常微分方程, 一般情况是 $R\leqslant n+4$; 如果这时是线性微分方程, 那么 $R\in\{n+1,n+2,n+4\}$。

9.3 特征线法和不变量

9.3.1 特征线法

数学中的特征线法是求解偏微分方程的一种方法, 适用于准线性偏微分方程的求解。只要初始值不是沿着特征线给定, 即可通过特征线法获得偏微分方程的精确解。其基本思想是通过把双曲线型的准线性偏微分方程转化为两组常微分方程, 再对常微分方程进行求解。两组常微分方程中的一组用于定义特征线, 另一组用以描述解沿给定特征线的变化。

一阶偏微分方程的特征线法。沿着一阶偏微分方程的特征线, 偏微分方程简化为一个常微分方程, 沿着特征线求出对应常微分方程的解就可以得到偏微分方程的解。

为了更好地解释这一方法, 考虑具有以下形式的偏微分方程

$$a(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}=c(x,y,u) \tag{9.53}$$

可改写为 $(a,b,c)(u_x,u_y,-1)=0$ 的向量的标量积形式。假设解 u 已知, 考虑 $\mathbf{R}^3$ 中的曲面 $z=u(x,y)$, 曲面的法向量为

$$[u_x(x,y),u_y(x,y),-1] \tag{9.54}$$

那么, 式 (9.53) 表示向量场

$$[a(x,y,z), b(x,y,z), c(x,y,z)] \tag{9.55}$$

与曲面 $z = u(x,y)$ 在任意点处相切。换句话说, 解函数的图像必定是该向量场的积分曲线的标量积。这些积分曲线称为偏微分方程的特征线。

特征线方程可以表示为不变的形式

$$\frac{\mathrm{d}x}{a(x,y,z)} = \frac{\mathrm{d}y}{b(x,y,z)} = \frac{\mathrm{d}z}{c(x,y,z)} = \mathrm{d}t \tag{9.56}$$

其中, t 为变换参数。特征线方程可以表示为等价的形式

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= a(x,y,z) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= b(x,y,z) \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= c(x,y,z) \end{aligned} \tag{9.57}$$

有关特征线的理论可以参考 Courant 的名著[84]。

特征线理论告诉我们, 特征线函数 $u(x,y)$ 为不变量, 这就是可以导出不变量的理论基础。

例 9.4 用特征线法求以下方程的通解:

$$xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} = xy \tag{9.58}$$

采用特征线法, 可以写出这个方程的特征线方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{xz} = \frac{\mathrm{d}y}{yz} = \frac{\mathrm{d}z}{xy} \tag{9.59}$$

由左边两个方程, 有关系

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y} \tag{9.60}$$

积分可得

$$\ln y - \ln x = \ln c_1 \tag{9.61}$$

即有

$$c_1 = \frac{y}{x} \tag{9.62}$$

c_1 为积分常数。由右边两个方程, 有

$$\frac{\mathrm{d}x}{xz} = \frac{\mathrm{d}z}{xy} \tag{9.63}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}x}{z}=\frac{\mathrm{d}z}{y} \tag{9.64}$$

利用 $y=c_1x$, 上式改为 $c_1x\mathrm{d}x=z\mathrm{d}z$, 积分后得 $c_1x^2=z^2-c_2$。利用 $c_1=y/x$, 上式可以简化为

$$c_2=z^2-\frac{y}{x}x^2=z^2-xy \tag{9.65}$$

这样原方程的 3 个自变量 x,y,z 就转换到特征线上的两个不变量 c_1, c_2, 这样原方程的解就可以表示为 $c_2=f(c_1)$, 即

$$G\left(z^2-xy,\frac{y}{x}\right)=0 \tag{9.66}$$

或者写为

$$z^2=xy+f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{9.67}$$

其中, G, f 为任意函数。这里的不变量 c_1, c_2 就可以作为新的独立变量, 用来简化方程, 这就是求解微分方程的不变量或相似变量的方法。

9.3.2 不变量

无穷小生成元

$$X=\xi\partial_x+\eta\partial_y \tag{9.68}$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\epsilon}=\xi,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\epsilon}=\eta \tag{9.69}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}x}{\xi}=\frac{\mathrm{d}y}{\eta}=\mathrm{d}\epsilon \tag{9.70}$$

函数 $f(x,y)$ 不变或对称的条件为

$$Xf=\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}=0 \tag{9.71}$$

对应的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\xi}=\frac{\mathrm{d}y}{\eta}=\frac{\mathrm{d}f}{0} \tag{9.72}$$

这个方程对应的不变性解为

$$f(x,y)=\text{常数} \tag{9.73}$$

这个方程还可以通过积分得到其特解, 作为不变量, 用于简化原方程。这个不变量的方法适用于任何阶数的常微分方程和偏微分方程。下面的例子的求解都是首先通过 Lie 群导出无穷小生成元, 然后寻找问题的不变量, 把不变量作为新的因变量和自变量, 简化方程, 以便达到求解的目的。

沿特征线有关系

$$\frac{\mathrm{d}x}{\xi}=\frac{\mathrm{d}y}{\eta},\quad 即\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\eta}{\xi} \tag{9.74}$$

这个方程的解可写为

$$u(x,y)=c \tag{9.75}$$

c 为积分常数。该式提供了 $\mathrm{d}y=(\eta/\xi)\mathrm{d}x$ 的积分路径的变换群, 是个重要关系。如果 $\xi=0$, 有 $u=x=c$; 如果 $\eta=0$, 有 $u=y=c$。

根据式 (9.74), 如果 u 本身是对称性条件 $Xf=0$ 的一个解, 那么

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\\&=u_x\mathrm{d}x+u_y\left(\frac{\eta}{\xi}\right)\mathrm{d}x\\&=(\xi u_x+\eta u_y)\frac{\mathrm{d}x}{\xi}=0\end{aligned} \tag{9.76}$$

同时, 对于函数 u 的任意函数 $f(u)$, 如果 u 是一个解, 那么

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}x}{\xi}(\xi u_x+\eta u_y)=0 \tag{9.77}$$

所以, 可以确定

$$f(u)=常数 \tag{9.78}$$

与式 (9.73) 等价。根据式 (9.70), 式 (9.74) 可以改写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\xi}=\frac{\mathrm{d}y}{\eta}=\mathrm{d}\epsilon \tag{9.79}$$

这与式 (9.70) 是等价的, 所以可以用特征线方程 [式 (9.74)] 来求变换群。

9.4 无穷小生成元一次延拓的不变量

无穷小生成元的一次延拓的对称性条件为

$$X^{(1)}f=Xf+\eta_1\partial_{y'}f=(\xi\partial_x+\eta\partial_y+\eta_1\partial_{y'})f=0 \tag{9.80}$$

其中, y' 和系数 $\eta_1=\eta_1(x,y,y')$ 视为独立变量。式 (9.80) 对应的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\xi}=\frac{\mathrm{d}y}{\eta}=\frac{\mathrm{d}y'}{\eta_1} \tag{9.81}$$

要特别强调的是, 这里把 y' 作为独立变量, 不要认为其是 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$。用以上的方法, 对式 (9.81) 中的任意两个方程进行积分, 可以得到两个不变量 c_1, c_2, 即

$$c_1=c_1(x,y),\quad c_2=c_2(x,y) \tag{9.82}$$

这样就得到式 (9.80) 的一般解

$$G(c_1, c_2) = 0 \tag{9.83}$$

不变量 c_1, c_2 只是一种记号, 可以使用任何其他符号。它们也称为相似变量, 可以作为新的变量对原来的方程进行简化。

9.5 无穷小生成元二次延拓的不变量

同样地, 无穷小生成元的二次延拓的对称性条件可以写为

$$X^{(2)}f = Xf + \eta_1\partial_{y'}f + \eta_2\partial_{y''}f = (\xi\partial_x + \eta\partial_y + \eta_1\partial_{y'} + \eta_2\partial_{y''})\,f = 0 \tag{9.84}$$

其中, $y', y'', \eta_1 = \eta_1(x, y, y')$, $\eta_2 = \eta_2(x, y, y', y'')$ 视为独立变量。式 (9.84) 对应的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\xi} = \frac{\mathrm{d}y}{\eta} = \frac{\mathrm{d}y'}{\eta_1} = \frac{\mathrm{d}y''}{\eta_2} \tag{9.85}$$

要特别强调的是, 这里把 y', y'' 视为独立变量, 不要将其分别认为是 dy/dx 和 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$。用以上的方法, 对式 (9.85) 中的任意 3 个方程进行积分, 可以得到 3 个不变量 c_1, c_2, c_3, 即

$$c_1 = c_1(x, y), \quad c_2 = c_2(x, y), \quad c_3 = c_3(x, y) \tag{9.86}$$

这样就得到式 (9.84) 的一般解

$$G(c_1, c_2, c_3) = 0 \tag{9.87}$$

采用同样的方法, 可以确定任意次数的延拓的一般解。一般地, 无穷小生成元的 n 次延拓 $X^{(n)}$ 将有 $(1+n)$ 个不变量。

例 9.5 对于二维转动群 (变换)[85]

$$x_1 = x\cos\epsilon - y\sin\epsilon, \quad y_1 = x\sin\epsilon + y\cos\epsilon \tag{9.88}$$

对应的无穷小变换为

$$\xi = -y, \quad \eta = x \tag{9.89}$$

其一次和二次无穷小生成元为

$$Xf = -y\partial_x + x\partial_y, \quad X^{(1)} = X + \eta_1\partial_{y'}, \quad X^{(2)} = X^{(1)} + \eta_2\partial_{y''} \tag{9.90}$$

其中, $\eta_1 = 1 + (y')^2, \eta_2 = 3y'y''$。对于一次延拓, 特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{-y} = \frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{\mathrm{d}y'}{1 + (y')^2} \tag{9.91}$$

使用其中的两个方程, 可以确定两个不变量。一个由 $\mathrm{d}x/(-y)=\mathrm{d}y/x$ 积分后确定为

$$c_1=x^2+y^2 \tag{9.92}$$

利用第一个不变量 c_1, 第二个方程 $\mathrm{d}y/x=\mathrm{d}y'/[1+(y')^2]$ 可以改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{c_1-y^2}}=\frac{\mathrm{d}y'}{1+(y')^2} \tag{9.93}$$

积分并整理后得到转动群的第二个不变量

$$c_2(x,y,y')=\frac{y-xy'}{x+yy'} \tag{9.94}$$

还可以进一步计算二次延拓的不变量, 这时特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{-y}=\frac{\mathrm{d}y}{x}=\frac{\mathrm{d}y'}{1+(y')^2}=\frac{\mathrm{d}y''}{3y'y''} \tag{9.95}$$

前两个不变量与以前一样, 只要求第三个不变量 c_3 即可。方程为

$$\frac{\mathrm{d}y'}{1+(y')^2}=\frac{\mathrm{d}y''}{3y'y''} \tag{9.96}$$

可以改写为

$$\frac{\mathrm{d}y''}{y''}=\frac{3y'\mathrm{d}y'}{1+(y')^2}=\frac{3}{2}\frac{\mathrm{d}[1+(y')^2]}{1+(y')^2} \tag{9.97}$$

积分很容易得到不变量

$$c_3=\frac{y''}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}} \tag{9.98}$$

对于复杂问题, 求高阶不变量有时非常复杂, 这个工作也可以用 Maple 等软件来完成。对于这个例子可以使用命令 $with(DEtools)$, $X:=[y,x]$, 求不变量 $invariants(X,y(x))$, 就可以得到以上结果。

第十章
Lie 代数

Lie 群既是群又是无限可微的流形, Lie 群这种光滑的群流形, 是做无穷小实验的好对象。Lie 群既然是群, 它作为流形一定有其与众不同之处, 那就是群中有一个特殊的单位元。通俗地说, Lie 群被表示成一个曲面, Lie 代数就是包含曲面微分性质的单位元上的切空间[78,80,82]。

数学上, Lie 代数是一个代数结构, 主要用于研究像 Lie 群和微分流形之类的几何对象。为什么要研究 Lie 代数? 因为比较起 Lie 群的流形结构而言, Lie 代数是性质更为简单的线性向量空间。

Lie 代数因研究无穷小变换的概念而引入。在旧文献中, 无穷小群指的就是 Lie 代数。随着时间的推移, Lie 代数在数学以及古典力学和量子力学中的地位不断上升。到 20 世纪 80 年代, Lie 代数不再仅仅被理解为群论问题线性化的工具, 它还是有限群理论及线性代数中许多重要问题的来源。Lie 代数的理论不断得到完善和发展, 其理论与方法已渗透到数学和理论物理的许多领域中。

10.1 Lie 代数

给定某一个无穷小生成元 $X_i = \xi_i \partial_x + \eta_i \partial_y, i = 1, 2$, 它们都是一阶偏微分。

显然, 两个无穷小生成元相互作用就会生成一个二阶偏微分算子, 即

$$\begin{aligned} X_1X_2 &= \xi_1\xi_2\partial_x^2 + (\xi_1\eta_2 + \eta_1\xi_2)\partial_x\partial_y + \eta_1\eta_2\partial_y^2 + (X_1\xi_2)\partial_x + (X_1\eta_2)\partial_y \\ X_2X_1 &= \xi_1\xi_2\partial_x^2 + (\xi_1\eta_2 + \eta_1\xi_2)\partial_x\partial_y + \eta_1\eta_2\partial_y^2 + (X_2\xi_1)\partial_x + (X_2\eta_1)\partial_y \end{aligned} \tag{10.1}$$

由式 (10.1) 可以看出, 其中的二阶微分项是一样的, 一阶微分项是不同的。如果它们相减, 二阶项就相互抵消了, 只剩下一阶项。这样微分的阶数与原来的 X_i 一样, 都是一阶的, 不升阶。这是一个很重要的特点。

引进 Lie 括号 (也称 Commutator 交换子或对易算符或 Poission 括号), 这样就有对易关系 (commutation relation)

$$[X_1, X_2] = X_1X_2 - X_2X_1 \tag{10.2}$$

是一阶算子, 具体表达为

$$[X_1, X_2] = (X_1\xi_2 - X_2\xi_1)\partial_x + (X_1\eta_2 - X_2\eta_1)\partial_y \tag{10.3}$$

Lie 括号有以下性质:

(1) 反对称性: $[X_1, X_2] = -[X_2, X_1]$。

(2) 双线性: $[C_1X_1 + C_2X_2, X_3] = C_1[X_1, X_3] + C_2[X_2, X_3]$。

(3) Jacobi 恒等式: $[X_1, [X_2, X_3]] + [X_2, [X_3, X_1]] + [X_3, [X_1, X_2]] = 0$。

Jacobi 恒等式很容易验证

$$\begin{aligned} &[X_1, [X_2, X_3]] + [X_2, [X_3, X_1]] + [X_3, [X_1, X_2]] \\ =\ & X_1[X_2, X_3] - [X_2, X_3]X_1 + X_2[X_3, X_1] - \\ & [X_3, X_1]X_2 + X_3[X_1, X_2] - [X_1, X_2]X_3 \\ =\ & X_1(X_2X_3 - X_3X_2) - (X_2X_3 - X_3X_2)X_1 + X_2(X_3X_1 - X_1X_3) - \\ & (X_3X_1 - X_1X_3)X_2 + X_3(X_1X_2 - X_2X_1) - (X_1X_2 - X_2X_1)X_3 \\ =\ & 0 \end{aligned} \tag{10.4}$$

另外, 可以验证, 如果 X_1, X_2 是微分方程的两个无穷小生成元, 那么 $X_3 = [X_1, X_2]$ 也是同一个微分方程的无穷小生成元。

如果有坐标变换 $(x, y) \mapsto (u, v)$, 显然, 每一个 X_i 可以利用求导的链式法则进行转换, 即有对 (u, v) 的无穷小生成元

$$\check{X}_i = (X_iu)\partial_u + (X_iv)\partial_v \tag{10.5}$$

对于任意函数 $F(u,v)$, 就有

$$
\begin{aligned}
&[\check{X}_1,\check{X}_2]F=[\check{X}_1\check{X}_2-\check{X}_2\check{X}_1]F\\
&=\check{X}_1(\check{X}_2F)-\check{X}_2(\check{X}_1F)\\
&=\check{X}_1\{[(X_2u)\partial_u+(X_2v)\partial_v]F\}-\check{X}_2\{[(X_1u)\partial_u+(X_1v)\partial_v]F\}\\
&=\check{X}_1[(X_2u)F_u+(X_2v)F_v]-\check{X}_2[(X_1u)F_u+(X_1v)F_v]\\
&=(X_1X_2u)F_u-(X_2X_1u)F_u+(X_1X_2v)F_v-(X_2X_1v)F_v\\
&=([X_1,X_2]u)F_u+([X_1,X_2]v)F_v\\
&=(X_3u)F_u+(X_3v)F_v\\
&=X_3F=[X_1,X_2]F
\end{aligned}
\tag{10.6}
$$

其中, $X_3=[X_1,X_2]$。由于函数 F 是任意的, 所以有关系

$$[\check{X}_1,\check{X}_2]=[X_1,X_2] \tag{10.7}$$

这说明, 坐标变换不改变 Lie 括号, 或者说 Lie 括号与坐标无关。这是一个非常重要的性质。由于 Lie 括号与坐标选择无关, 所以今后没有必要区分 $\check{X}_i$ 和 X_i, 可以对任何坐标系统使用 X_i 表示生成元。

对于 k 阶生成元的延拓 $X_i^{(k)}$, 也有同样的关系, 即

$$[X_1^{(k)},X_2^{(k)}]=X_3^{(k)} \tag{10.8}$$

由于 Lie 括号的反对称性, 一般有关系

$$[X_i,X_j]=c_{ij}^kX_k,\quad [X_i,X_i]=0,\quad [X_i,X_j]=-[X_j,X_i],\quad c_{ij}^k=-c_{ji}^k \tag{10.9}$$

常数 c_{ij}^k 称为结构常数。如果 $[X_i,X_j]=0$, 则称 X_i, X_j 是可交换的, 否则为不可交换。

例如, $X_1=\partial_x,\quad X_2=x\partial_x+(3/4)y\partial_y$, 可以计算出几种组合 Lie 括号为

$$[X_1,X_2]=[X_1(x)-X_2(1)]\partial_x+\left[X_1\left(\frac{3}{4}y\right)-X_2(0)\right]\partial_y=\partial_x=X_1 \tag{10.10}$$

以及 $[X_1,X_1]=[X_2,X_2]=0$, 和 $[X_1,X_2]=-[X_2,X_1]=-X_1$, 所以, 结构常数是 $c_{12}^1=1$, $c_{21}^1=-1$。

由于在 $\mathcal{L}$ 存在作为 "乘积" 的对易交换算符 $[\cdot,\cdot]$ 的运算, 所以 $\mathcal{L}$ 不仅是向量空间, 而且是一种 Lie 代数。算符 $[\cdot,\cdot]$ 是双线性、反对称性的, 并且满足 Jacobi 恒等式。例如, 向量的向量积运算就是 Lie 代数。

10.2 可解 Lie 代数

给定任意的 Lie 代数 $\mathcal{L} = \mathrm{Span}\{X_1, X_2, \cdots, X_R\}$, 可以构造一个导出子代数 $\mathcal{L}^{(1)}$, 其包含 $\mathcal{L}$ 的所有交换算子或换位运算, 即

$$\mathcal{L}^{(1)} = [\mathcal{L}, \mathcal{L}] \tag{10.11}$$

如果 $\mathcal{L}^{(1)} \neq \mathcal{L}$, 可以继续构造 $\mathcal{L}^{(1)}$ 的导出子代数, 即

$$\mathcal{L}^{(2)} = [\mathcal{L}^{(1)}, \mathcal{L}^{(1)}] \tag{10.12}$$

并且可以继续这个过程

$$\mathcal{L}^{(k)} = [\mathcal{L}^{(k-1)}, \mathcal{L}^{(k-1)}] \tag{10.13}$$

直到不能得到一个新的子代数为止。如果对于某一个 k, 导出的子代数截至 $\mathcal{L}^{(k)} = \{0\}$, 那么就说 $\mathcal{L}$ 是可解的。

对于常用的二维代数有结论: 任何二维代数都是可解的。

对于二维代数 $\mathcal{L}_2$ 可以这样来构造序列: 例如, 首先选 X_1, X_2 作为基, 就有等式 $[X_1, X_2] = \alpha X_1$, 因此, 由 X_1 展开的一维代数 $\mathcal{L}_1$ 就是 $\mathcal{L}_2$ 的理想, 商代数 X_2/X_1 可以认为是由 X_2 展开而成的。如果 X_2 是一个常微分方程的生成元, 我们就可以使用理想 X_1 把微分方程的阶数降阶一次, 降阶后的方程满足商代数 X_2/X_1。这就是可以使用 Lie 群对称性逐步降阶求解微分方程的理论基础。

例 10.1 设有一个四阶非线性微分方程

$$y'''' = (y''')^{\frac{4}{3}} \tag{10.14}$$

这个方程有五维 Lie 代数 $\mathcal{L}$, 其基为

$$X_1 = \partial_y, \quad X_2 = x\partial_y, \quad X_3 = x^2\partial_y, \quad X_4 = \partial_x, \quad X_5 = x\partial_x \tag{10.15}$$

非零的换位运算 $[X_i, X_j]$ $(i < j)$ 共有以下几种组合:

(1) $[X_2, X_4] = -X_1$

(2) $[X_2, X_5] = -X_2$

(3) $[X_3, X_4] = -2X_2$

(4) $[X_3, X_5] = -2X_3$

(5) $[X_4, X_5] = X_4$

也可以列表如下 (表 10.1)。

表 10.1 Lie 代数结构系数表

$[X_i, X_j]$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	0	0	0
X_2	0	0	0	$-X_1$	$-X_2$
X_3	0	0	0	$-2X_2$	$-2X_3$
X_4	0	X_1	$2X_2$	0	X_4
X_5	0	X_2	$2X_3$	$-X_4$	0

从表中可以看到, 一共只有 X_1, X_2, X_3, X_4, 所以 $\mathcal{L}$ 有导出代数 $\mathcal{L}^{(1)}$

$$\mathcal{L}^{(1)} = \mathrm{Span}\{X_1, X_2, X_3, X_4\} \tag{10.16}$$

因为 $\mathcal{L}^{(1)} \neq \mathcal{L}$, 可以继续计算 $\mathcal{L}^{(2)}$, 从 Lie 代数结构系数表中可以看出, 对应于 X_1, X_2, X_3, X_4, 只有两个换位运算不为零, 即

$$[X_2, X_4] = -X_1, \quad [X_3, X_4] = -2X_2 \tag{10.17}$$

这样就只有 X_1, X_2, 所以

$$\mathcal{L}^{(2)} = \mathrm{Span}\{X_1, X_2\} \tag{10.18}$$

继续运算, 从表中可以看出 X_1, X_2 的换位运算为零, 即

$$[X_1, X_2] = 0 \tag{10.19}$$

所以, 有

$$\mathcal{L}^{(3)} = \{0\} \tag{10.20}$$

这表明, $\mathcal{L}$ 是可解的。

第十一章
二阶微分方程的求解

这一章介绍使用 Lie 群对称性逐步降阶求解二阶微分方程的方法和例子。

11.1 正则变量方法

首先引入生成元 $X_1 = \xi_1\partial_x + \eta_1\partial_y$ 和 $X_2 = \xi_2\partial_x + \eta_2\partial_y$ 的反对称运算

$$X_1 \vee X_2 = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 \tag{11.1}$$

定理 11.1 适当选择基 X_1, X_2, 任何二维 Lie 代数都可以简化成以下 4 种正则情况之一:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{I}: [X_1, X_2] = 0, \quad X_1 \vee X_2 \neq 0 \\
&\mathrm{II}: [X_1, X_2] = 0, \quad X_1 \vee X_2 = 0 \\
&\mathrm{III}: [X_1, X_2] = X_1, \quad X_1 \vee X_2 \neq 0 \\
&\mathrm{IV}: [X_1, X_2] = X_1, \quad X_1 \vee X_2 = 0
\end{aligned} \tag{11.2}$$

定理 11.2 适当选择变量, 任何二维 Lie 代数的基都可以简化成以下 4 种

正则情况之一:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}: X_1 &= \partial_x, \quad X_2 = \partial_y \\
\mathrm{II}: X_1 &= \partial_y, \quad X_2 = x\partial_y \\
\mathrm{III}: X_1 &= \partial_y, \quad X_2 = x\partial_x + y\partial_y \\
\mathrm{IV}: X_1 &= \partial_y, \quad X_2 = y\partial_y
\end{aligned}
\tag{11.3}
$$

变量 x, y 称为正则变量。

11.2 Lie 群求解微分方程的 5 步法

利用 Lie 群求解微分方程的 5 步法[78,80] 如表 11.1 所示。

表 11.1 Lie 群求解微分方程的 5 步法

步骤	操作
Step 1	计算微分方程的无穷小生成元 X_r
Step 2	如果 $r > 2$, 需要确定其子代数 $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_r$。如果 $r < 2$, 微分方程不能利用 Lie 群进行简化求解 ($r = 2$ 的情况总是可解的)
Step 3	计算 X_2 基的交换子 $[X_1, X_2]$ 和 $X_1 \vee X_2$, 如果需要, 可改变基以便对应式 (11.2)
Step 4	引入正则变量, 把微分方程改写为正则变量的形式, 积分求解
Step 5	把解变成原来变量的形式, 即得到方程的解

例 11.1 用 5 步法求解微分方程[78,80]

$$
y'' = \frac{y'}{y^2} - \frac{1}{xy} \tag{11.4}
$$

显然, 这是一个非线性二阶常微分方程, 直接求解非常复杂。现在用 Lie 群方法来试试。

Step 1: 计算微分方程的无穷小生成元, 得到

$$
\begin{aligned}
X &= C_1 X_1 + C_2 X_2 \\
X_1 &= x^2\partial_x + xy\partial_y \\
X_2 &= x\partial_x + \frac{y}{2}\partial_y
\end{aligned}
\tag{11.5}
$$

Step 2: 显然, 这时 $r = 2$, 是可解的, 可用 Lie 群简化。

Step 3: 这时有关系

$$
[X_1, X_2] = -X_1, \quad X_1 \vee X_2 = -\frac{1}{2}x^2 y \neq 0 \tag{11.6}
$$

把 X_2 变号后即可对应 $\mathcal{L}_2$ 的情况 III, 改号后, 由以下基展开得到 $\mathcal{L}_2$ 代数就有正

则结构 Ⅲ

$$\begin{aligned} X &= C_1X_1 + C_2X_2 \\ X_1 &= x^2\partial_x + xy\partial_y \\ X_2 &= -x\partial_x - \frac{y}{2}\partial_y \end{aligned} \tag{11.7}$$

Step 4: 对应于 X_1, 正则变量 u, v 满足的正则方程为

$$\begin{aligned} x^2\partial_x u + xy\partial_y v &= 0 \\ x^2\partial_x u + xy\partial_y v &= 1 \end{aligned} \tag{11.8}$$

又有只要求以上方程的一个特解, 设 u, v 都具有形式 $x^a y^b$, 代入即可确定最简单的正则变量为

$$u = \frac{y}{x}, \quad v = -x^{-1} \tag{11.9}$$

把 (x, y) 变为 (u, v) 后, X_1 变换为

$$X_1 = \partial_v \tag{11.10}$$

相应地, X_2 变换为

$$X_2 = \frac{1}{2}u\partial_u + v\partial_v \tag{11.11}$$

选择 u, v 作为新变量, 微分方程变为

$$\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)^2 = 0 \tag{11.12}$$

积分后得到两个解

$$v = \frac{-u^2}{2} + C \tag{11.13}$$

$$v = \frac{u}{C_1} + \frac{1}{C_1^2}\ln|C_1u - 1| + C_2 \tag{11.14}$$

注意到微分方程还有一个解, 就是当 $y'' = 0$ 时, 有解 $y = Cx$。

Step 5: 把原变量代入以上的解中得到微分方程的 3 个解

$$y = \pm\sqrt{2x + Cx^2} \tag{11.15}$$

$$C_1y + C_2x + x\ln\left|C_1\frac{y}{x} - 1\right| + C_1^2 = 0 \tag{11.16}$$

$$y = Cx \tag{11.17}$$

其中, C_i 均为任意积分常数。

例 11.2 设有非线性常微分方程

$$F(x, y, y', y'') = y'' - \frac{(y')^2}{y} - (y - y^{-1})y' = 0 \tag{11.18}$$

可得到 $\xi = 1, \eta = 0$, 代表平移变换。这个方程只有一个无穷小生成元 $X = \partial_x$, 所以

$$\eta_1 = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} - y'\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} = 0, \quad \eta_2 = \frac{\mathrm{d}\eta_1}{\mathrm{d}x} - y''\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{11.19}$$

对于二次延拓, 有对称性条件

$$X^{(2)}F(x,y,y',y'') = \xi\partial_x F + \eta\partial_y F + \eta_1\partial_{y'}F + \eta_2\partial_{y''}F = \partial_x F(x,y,y',y'') = 0 \tag{11.20}$$

对称性条件的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{1} = \frac{\mathrm{d}y}{0} = \frac{\mathrm{d}y'}{0} = \frac{\mathrm{d}y''}{0} = \frac{\mathrm{d}F}{0} \tag{11.21}$$

积分后的常数就是不变量或正则变量, 所以, $u = y, v = y'$。方程 (11.18) 可以变为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{v}{u} + u - \frac{1}{u} \tag{11.22}$$

直接积分得到 $v = u^2 - 2c_1u + 1$。把 $u = y$, $v = y'$ 代入, 就有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 - 2c_1y + 1 \tag{11.23}$$

积分后可以得到方程的解

$$y = \begin{cases} c_1 - \sqrt{c_1^2 - 1}\tanh[\sqrt{c_1^2-1}(x+c_2)], & c_1^2 > 1 \\ c_1 - (x+c_2)^{-1}, & c_1^2 = 1 \\ c_1 + \sqrt{1-c_1^2}\tanh[\sqrt{1-c_1^2}(x+c_2)], & c_1^2 < 1 \end{cases} \tag{11.24}$$

例 11.3 给定非线性常微分方程[82]

$$F(x,y,y',y'') = yy'' - (y')^2 + y^3 = 0 \tag{11.25}$$

这个方程就是方程 (9.38), 它有二维对称 Lie 代数 $X_1 = \partial_x$, $X_2 = x\partial_x - 2y\partial_y$, 其中 X_1 代表平移, X_2 代表转动, Lie 括号 $[X_1, X_2] = \partial_x = X_1$。现在利用 Lie 群求解这个方程。

对于对称 $X_1 = \partial_x$, 有

$$\eta_1 = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} - y'\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} = 0, \quad \eta_2 = \frac{\mathrm{d}\eta_1}{\mathrm{d}x} - y''\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{11.26}$$

对于二次延拓, 有对称性条件

$$X^{(2)}F(x,y,y',y'') = \xi\partial_x F + \eta\partial_y F + \eta_1\partial_{y'}F + \eta_2\partial_{y''}F = \partial_x F(x,y,y',y'') = 0 \tag{11.27}$$

对称性条件的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{1} = \frac{\mathrm{d}y}{0} = \frac{\mathrm{d}y'}{0} = \frac{\mathrm{d}y''}{0} = \frac{\mathrm{d}F}{0} \tag{11.28}$$

积分后的常数就是不变量或正则变量, 所以, $u = y, v = y'$。

式 (11.25) 可以简化为一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{v}{u} - \frac{u^2}{v} \tag{11.29}$$

对于这个方程, 可以继续使用 Lie 群方法求解。它的对称性条件为

$$X = 2u\partial_u + 3v\partial_v \tag{11.30}$$

即有 $\xi = 2u$, $\eta = 3v$。一次延拓

$$\eta_1 = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}u} - v'\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}u} = -2v' = -2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} \tag{11.31}$$

对称性条件的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}u}{2u} = \frac{\mathrm{d}v}{3v} = \frac{\mathrm{d}v'}{-2v'} = \frac{\mathrm{d}F}{0} \tag{11.32}$$

积分后的常数就是不变量或正则变量。所以, 正则变量可以取 $r = v^2/u^3$, $s = uv'$。可得方程的解为

$$y = \frac{A}{2}\left[1 - \tanh\left(\pm\frac{\sqrt{A}(B-x)}{2}\right)^2\right] \tag{11.33}$$

其中, A, B 为待定常数。

第十二章

偏微分方程的 Lie 群对称方法

以上介绍的 Lie 群对称方法都是针对常微分方程的结果, 其中只有一个自变量 x, 一个因变量 y。其实, 这个方法是一般性的, 完全可以推广到任意变量的偏微分方程的情况。现在把相应的结果推广到有一个因变量 y, 两个自变量 x, t 的情况, 这样就可以用于偏微分方程的求解。

设有两个自变量 x, t 和一个因变量 y, 有 Lie 群变换

$$(x, t, y) \mapsto (\hat{x}, \hat{t}, \hat{y}) \tag{12.1}$$

如果这个变换只有一个参数 ϵ, 其无穷小变换可以展开为

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x + \epsilon\xi(x, t, y) + \cdots = \mathrm{e}^{\epsilon X} x \\ \hat{t} &= t + \epsilon\tau(x, t, y) + \cdots = \mathrm{e}^{\epsilon X} t \\ \hat{y} &= y + \epsilon\eta(x, t, y) + \cdots = \mathrm{e}^{\epsilon X} y \end{aligned} \tag{12.2}$$

其中, 无穷小生成元

$$X = \xi\partial_x + \tau\partial_t + \eta\partial_y \tag{12.3}$$

同样地, $(\hat{x}, \hat{t}, \hat{y})$ 可以这样来确定

$$\frac{\mathrm{d}\hat{x}}{\mathrm{d}\epsilon} = \xi(\hat{x}, \hat{t}, \hat{y}), \quad \frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}\epsilon} = \tau(\hat{x}, \hat{t}, \hat{y}), \quad \frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}\epsilon} = \eta(\hat{x}, \hat{t}, \hat{y}) \tag{12.4}$$

初始条件 $(\hat{x},\hat{t},\hat{y})|_{\epsilon=0}=(x,t,y)$。

函数 $F(\hat{x},\hat{t},\hat{y})$ 可以展开为

$$F(\hat{x},\hat{t},\hat{y})=F(x,t,y)+\epsilon\xi\partial_x+\epsilon\tau\partial_t+\epsilon\eta\partial_y+\cdots=\mathrm{e}^{\epsilon X}F(x,t,y) \tag{12.5}$$

对于因变量对自变量的导数的延拓, 有以下关系:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\hat{y}}{\partial\hat{x}}&=\frac{\partial y}{\partial x}+\epsilon\eta^x(x,t,y,y_x,y_t)+O(\epsilon^2)\\
\frac{\partial\hat{y}}{\partial\hat{t}}&=\frac{\partial y}{\partial t}+\epsilon\eta^t(x,t,y,y_x,y_t)+O(\epsilon^2)\\
\eta^x&=D_x\eta-y_xD_x\xi-y_tD_x\tau\\
&=\eta_x+(\eta_y-\xi_x)y_x-\tau_xy_t-\xi_yy_x^2-\tau_yy_xy_t\\
\eta^t&=D_t\eta-y_xD_t\xi-y_tD_t\tau\\
&=\eta_t+(\eta_y-\tau_t)y_t-\xi_ty_x-\xi_yy_xy_t-\tau_yy_t^2
\end{aligned} \tag{12.6}$$

其中, 算子记为 $y_x=\partial y/\partial x$, D_x 是全导数, 即

$$\begin{aligned}
D_x&=\partial_x+y_x\partial_y+y_{xx}\partial_{y_x}+y_{xt}\partial_{y_t}+\cdots\\
D_t&=\partial_t+y_t\partial_y+y_{xt}\partial_{y_x}+y_{tt}\partial_{y_t}+\cdots
\end{aligned} \tag{12.7}$$

特别注意, 全导数把变量 y 及其导数都看作相互独立的变量。

这样就有无穷小生成元的一次延拓

$$\begin{aligned}
F(\hat{x},\hat{t},\hat{y},\hat{y}_x,\hat{y}_t)&=F(x,t,y,y_x,y_t)+\epsilon X^{(1)}F(x,t,y,y_x,y_t)+O(\epsilon^2)\\
X^{(1)}&=X+\eta^x\partial_{y_x}+\eta^t\partial_{y_t}=\xi\partial_x+\tau\partial_t+\eta\partial_y+\eta^x\partial_{y_x}+\eta^t\partial_{y_t}
\end{aligned} \tag{12.8}$$

和二次延拓

$$\begin{aligned}
F(\hat{x},\hat{t},\hat{y},\hat{y}_x,\hat{y}_t,\hat{y}_{xx},\hat{y}_{xt},\hat{y}_{tt})&=F(x,t,y,y_x,y_t,y_{xx},y_{xt},y_{tt})+\\
&\quad\epsilon X^{(2)}F(x,t,y,y_x,y_t,y_{xx},y_{xt},y_{tt})+O(\epsilon^2)\\
X^{(2)}&=X^{(1)}+\eta_2^{xx}\partial_{y_{xx}}+\eta_2^{xt}\partial_{y_{xt}}+\eta_2^{tt}\partial_{y_{tt}}
\end{aligned} \tag{12.9}$$

其中

$$\begin{aligned}
\eta_2^{xx}&=\eta_{xx}+(2\eta_{xy}-\xi_{xx})y_x-\tau_{xx}y_t+(\eta_{yy}-2\xi_{xy})y_x^2-\\
&\quad 2\tau_{xy}y_xy_t-\xi_{yy}y_x^3-\tau_{yy}y_x^2y_t+(\eta_y-2\xi_x)y_{xx}-\\
&\quad 2\tau_xy_{xt}-3\xi_yy_xy_{xx}-\tau_yy_ty_{xx}-2\tau_yy_xy_{xt}\\
\eta_2^{xt}&=\eta_{xt}+(\eta_{ty}-\xi_{xt})y_x+(\eta_{xy}-\tau_{xt})y_t-\xi_{ty}y_x^2+\\
&\quad(\eta_{yy}-\xi_{xy}-\tau_{ty})y_xy_t-\tau_{xy}y_t^2-\xi_{yy}y_x^2y_t-\tau_{yy}y_xy_t^2-\\
&\quad\xi_ty_{xx}-\xi_yy_ty_{xx}+(\eta_y-\xi_x-\tau_t)y_{xt}-2\xi_yy_xy_{xt}-\\
&\quad 2\tau_yy_ty_{xt}-\tau_xy_{tt}-\tau_yy_xy_{tt}\\
\eta_2^{tt}&=\eta_{tt}-\xi_{tt}y_x+(2\eta_{ty}-\tau_{tt})y_t-2\xi_{ty}y_xy_t+\\
&\quad(\eta_{yy}-2\tau_{ty})y_t^2-\xi_{yy}y_xy_t^2-\tau_{yy}y_t^3-2\xi_ty_{xt}-\\
&\quad 2\xi_yy_ty_{xt}+(\eta_y-2\tau_t)y_{tt}-\xi_yy_xy_{tt}-3\tau_yy_ty_{tt}
\end{aligned} \tag{12.10}$$

这样对于一阶偏微分方程 $F(x,t,y,y_x,y_t)=0$, 其 Lie 群对称性就可以表示为

$$X^{(1)}F(x,t,y,y_x,y_t)|_{F=0}=0 \tag{12.11}$$

这样对于二阶偏微分方程 $F(x,t,y,y_x,y_t,y_{xx},y_{xt},y_{tt})=0$, 其 Lie 群对称性就可以表示为

$$X^{(2)}F(x,t,y,y_x,y_t,y_{xx},y_{xt},y_{tt})|_{F=0}=0 \tag{12.12}$$

类似 Lie 群对称性可以推广到任意个自变量和因变量任意阶的情况, 这里就不再介绍了, 读者可以参考有关专著。

例 12.1　已知方程 $u_t=u_x^2$, 求无穷小生成元[82]。

这是个非线性偏微分方程, 使用式 (12.2), 把 y 换成 u, u_t 用 u_x^2 代替, 无穷小生成元的决定方程为

$$\begin{aligned}&\eta_t-\xi_t u_x+(\eta_u-\tau_t)u_x^2-\xi_u u_x^3-\tau_u u_x^4\\&=2u_x[\eta_x+(\eta_u-\xi_x)u_x-(\xi_u+\tau_x)u_x^2-\tau_u u_x^3]\end{aligned} \tag{12.13}$$

方程两边合并有关 u_x 的同类项, 得到

$$\begin{aligned}&u_x^0:\quad \eta_t=0\\&u_x^1:\quad \xi_t+2\eta_x=0\\&u_x^2:\quad \eta_u+\tau_t-2\xi_x=0\\&u_x^3:\quad \xi_u+2\tau_x=0\\&u_x^4:\quad \tau_u=0\end{aligned} \tag{12.14}$$

可以得到其无穷小生成元的分量, 即

$$\begin{aligned}&\xi=-4c_1tx-2c_2t+c_4\left(\frac{x^2}{2}-2tu\right)+c_6x+c_7-4c_8xu-2c_9u\\&\tau=-4c_1t^2+c_4xt+c_5t+c_8x^2+c_9x+c_{10}\\&\eta=c_1x^2+c_2x+c_3+c_4xu-c_5u+2c_6u-4c_8u^2\end{aligned} \tag{12.15}$$

这样, 无穷小生成元为

$$X=\xi\partial_x+\tau\partial_t+\eta\partial_u=\sum_{i=1}^{10}c_iX_i \tag{12.16}$$

可以看出偏微分方程有较多的对称。

第十三章
泛函的 Lie 群对称性和 Noether 守恒律

13.1 泛函变分的 Lie 群对称性

简单地讲, 泛函就是函数的函数。函数的微小变化称为函数的变分, 对应的泛函也会有一个微小变化, 即泛函的变分。通常, 当泛函的变分为零时, 可以求得泛函对应的极值。

如果微分方程可以用变分导出, 这时有可能使用 Lie 群对称性把这个方程的阶数降低两阶。例如, 一个微分方程的 Lagrange 函数是 $F = F(x, y, y')$, 对应的作用量 (action) 泛函为

$$W = \int F(x, y, y')\mathrm{d}x \tag{13.1}$$

那么变分原理告诉我们, 泛函的最小系统状态要求作用量泛函 W 的变分

$$\delta W = 0 \tag{13.2}$$

可以得到这个问题的 Euler-Lagrange 方程为

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \tag{13.3}$$

前几章讨论了函数和方程的对称性, 下面讨论在 Lie 群变换下的泛函 W 的对称性。具体地讲, 对于变换

$$(x, y, y') \mapsto (\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}') \tag{13.4}$$

Lie 群对称性要求变换后的泛函 $\hat{W}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}')$ 不变, 即必须等于原来的泛函 $W(x, y, y')$, 即

$$\hat{W}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}') = W(x, y, y') \tag{13.5}$$

其中, $\hat{W}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}') = \int F(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}')\mathrm{d}\hat{x}$。变换后的泛函对应的 Euler-Lagrange 方程变为

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{y}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{y}'} = 0 \tag{13.6}$$

现在来确定泛函对称性的条件。根据前面的讨论, 利用无穷小生成元$X = \xi\partial_x + \eta\partial_y$, Lagrange 函数 $F(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}')$ 可以展开为一次延拓

$$F(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}') = F(x, y, y') + \epsilon X^{(1)}F + O(\epsilon^2) \tag{13.7}$$

考虑到此时

$$\begin{gathered} \mathrm{d}\hat{x} = \mathrm{d}[x + \epsilon\xi + O(\epsilon^2)] = \mathrm{d}x + \epsilon D\xi \mathrm{d}x + O(\epsilon^2) \\ D\xi = (\partial_x + y'\partial_y)\xi \end{gathered} \tag{13.8}$$

这样变换后的泛函就为

$$\begin{aligned} \hat{W}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}') &= \int F(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}')\mathrm{d}\hat{x} \\ &= \int [F(x, y, y') + \epsilon X^{(1)}F + O(\epsilon^2)][\mathrm{d}x + \epsilon D\xi \mathrm{d}x + O(\epsilon^2)] \\ &= \int F(x, y, y')\mathrm{d}x + \epsilon X^{(1)}D\xi + \epsilon X^{(1)}F + O(\epsilon^2) \\ &= W(x, y, y') + \epsilon D\xi F + \epsilon X^{(1)}F + O(\epsilon^2) \end{aligned} \tag{13.9}$$

根据 Lie 群对称性式 (13.5), 有 Lie 群对称性 (不变性) 条件

$$X^{(1)}F + D\xi F = 0 \tag{13.10}$$

其中的一次延拓$X^{(1)}$ 见式 (8.66)。

在特别情况下, 如果 $X = \partial_y$, $F = F(x, y')$, 那么对称性条件式 (13.10) 就变为变分的 Euler-Lagrange 条件 $DX_{y'} = 0$, 由此推导出对应的微分方程可以降阶。

对于高阶泛函问题, Lagrange 函数 $F = F[x, y, y', y'', \cdots, y^{(p)}]$, 相应的作用量泛函为

$$W = \int F[x, y, y', y'', \cdots, y^{(p)}]\mathrm{d}x \tag{13.11}$$

变分后, 其 Euler-Lagrange 方程为

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)+\cdots+(-1)^p\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}x^p}\left[\frac{\partial F}{\partial y^{(p)}}\right]=0 \tag{13.12}$$

或写为

$$E_p(F)=0 \tag{13.13}$$

其中, Euler 变分算子

$$E_p=\frac{\partial}{\partial y}+\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left[\frac{\partial}{\partial y^{(k)}}\right]=0 \tag{13.14}$$

其中, k 为整数。此时 Lie 群对称性条件为

$$\begin{gathered}\text{当 } W_1[\hat{x},\hat{y},\hat{y}',\cdots,\hat{y}^{(p)}]=W[x,y,y',y'',\cdots,y^{(p)}] \text{ 时},\\ X^{(p)}F+[D_{(p)}\xi]F=0\end{gathered} \tag{13.15}$$

其中, 无穷小生成元的 p 次延拓 $X^{(p)}$ 见式 (8.86), 全导数算子

$$\begin{aligned}D_{(p)}&=\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}+y''\frac{\partial}{\partial y'}+\cdots+y^{(p)}\frac{\partial}{\partial y^{(p-1)}}\\&=\frac{\partial}{\partial x}+\sum_{k=1}^{p}y^{(k)}\frac{\partial}{\partial y^{(k-1)}}\end{aligned} \tag{13.16}$$

从上面的推导可以看出, 一旦一个微分方程可以转换成一个泛函的变分, 就意味着微分方程可以降低两阶, 而有 Lie 群对称性的方程只能降低一阶。这就是人们为什么总是希望找到守恒律的原因。

13.2 多变量情况下的导数和全导数

由于需要涉及许多符号, 这里先特别介绍这些符号[83]。多个自变量和因变量可以记成向量, 即 n 个自变量

$$\boldsymbol{x}=(x^j)=(x^1,\cdots,x^n),\quad j=1,\cdots,n \tag{13.17}$$

和 m 个因变量

$$\boldsymbol{y}=(y^i)=(y^1,\cdots,y^m),\quad i=1,\cdots,m \tag{13.18}$$

联系单参数 ϵ, Lie 群变换可以写为

$$\bar{x}^j=F^j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\epsilon),\quad \bar{y}^i=G^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\epsilon) \tag{13.19}$$

对于常微分方程, 原来的符号 $y_x = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 改为 $y_1 = y_x = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, 这样就容易表达高阶导数, 即有新符号

$$y_1 \equiv \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \quad y_2 \equiv \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}, \cdots, y_{p-1} \equiv \frac{\mathrm{d}^{p-1} y}{\mathrm{d}x^{p-1}}, \quad y_p \equiv \frac{\mathrm{d}^p y}{\mathrm{d}x^p} \tag{13.20}$$

对于偏微分方程, 由于有多个自变量和因变量, 偏微分符号定义如下:

$$y^i_j \equiv \frac{\partial y^i}{\partial x^j}, \quad y^i_{j_1 j_2} \equiv \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^{j_1} x^{j_2}}, \cdots, \quad y^i_{j_1 j_2 j_3 \cdots j_p} \equiv \frac{\partial^p y^i}{\partial x^{j_1} x^{j_2} \partial x^{j_3} \cdots \partial x^{j_p}} \tag{13.21}$$

其中, $j_1, j_2, j_3, \cdots$ 代表任意不同的自变量。

所有一阶偏导数组成一个向量 $\boldsymbol{y}_1$, 定义为

$$\boldsymbol{y}_1 \equiv (y^i_j) = \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial y^1}{\partial x^n}, \frac{\partial y^2}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial y^2}{\partial x^n}, \cdots, \frac{\partial y^m}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial y^m}{\partial x^n}\right) \tag{13.22}$$

或者写为

$$\boldsymbol{y}_1 \equiv (y^i_j) = (y^1_1, \cdots, y^1_n, y^2_1, \cdots, y^2_n, \cdots, y^m_1, \cdots, y^m_n) \tag{13.23}$$

所有二阶偏导数为

$$\boldsymbol{y}_2 \equiv (y^i_{j_1 j_2}) = (y^1_{11}, y^1_{12}, \cdots, y^1_{nn}, \cdots, y^m_{11}, \cdots, y^m_{nn}) \tag{13.24}$$

所有三阶偏导数为

$$\boldsymbol{y}_3 \equiv (y^i_{j_1 j_2 j_3}) = (y^1_{111}, y^1_{112}, \cdots, y^1_{nnn}, \cdots, y^m_{111}, \cdots, y^m_{nnn}) \tag{13.25}$$

所有 p 阶偏导数为

$$\boldsymbol{y}_p \equiv (y^i_{j_1 j_2 j_3 \cdots j_p}) \tag{13.26}$$

Lie 群变换 (以二阶导数为例) 可以写为

$$\bar{x} = x + \epsilon \xi(x, y) \tag{13.27}$$

$$\bar{y} = y + \epsilon \eta(x, y) \tag{13.28}$$

$$\bar{y}_1 = y_1 + \epsilon \eta_{[1]}(x, y, y_1) \tag{13.29}$$

$$\bar{y}_2 = y_2 + \epsilon \eta_{[2]}(x, y, y_1, y_2) \tag{13.30}$$

如果有两个自变量, 此时

$$\bar{y}^i_{j_1 j_2} = y_{j_1 j_2} + \epsilon \eta_{[j_1 j_2]}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2) \tag{13.31}$$

一个自变量的全导数

$$\frac{D}{Dx} = D_x = \frac{\partial}{\partial x} + y_x \frac{\partial}{\partial y} + y_{xx} \frac{\partial}{\partial y_x} + \cdots + y_{(p+1)x} \frac{\partial}{\partial y_{px}} \tag{13.32}$$

或者

$$\frac{D}{Dx^1} = D_1 = \frac{\partial}{\partial x^1} + y_1\frac{\partial}{\partial y} + y_2\frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + y_{p+1}\frac{\partial}{\partial y_p} \tag{13.33}$$

j 个自变量的全导数一般可以写为

$$\frac{D}{Dx^j} = D_j = \frac{\partial}{\partial x^j} + y^i_j\frac{\partial}{\partial y^i} + y^i_{j_1 j}\frac{\partial}{\partial y^i_{j_1}} + \cdots + y^i_{j_1 j_2 \cdots j_p j}\frac{\partial}{\partial y^i_{j_1 j_2 \cdots j_p}} \tag{13.34}$$

全导数是可交换的, 有以下运算:

$$\begin{gathered} D_j x^\alpha = x^\alpha_j,\ D_j y^\alpha = y^\alpha_j \\ D_{j_1} y^\alpha_j = y^\alpha_{j_1 j} = D_{j_1} D_j y^\alpha,\ D_{j_1}(D_{j_2}()) = D_{j_2}(D_{j_1}()) \end{gathered} \tag{13.35}$$

13.3 Noether 守恒律

Noether 守恒律[86] 是由一位德国女数学家 E. Noether 在 1918 年研究泛函变分在 Lie 群变换下的对称性时发现的, 她首次揭示了物理定律对称性与物理量守恒定律的对应关系, 因此称为 Noether 守恒律。Noether 守恒律的一种比较完善的表述为: 对于每个连续微对称性, 存在一个对应的守恒流。

物理定律的对称性意味着物理定律在各种变换条件下的不变性, Noether 守恒律将物理学中 "对称" 的重要性推到了前所未有的高度。Noether 守恒律对于所有基于作用量原理的物理定律是成立的[87]。

Noether 守恒律是理论物理的核心结果之一, 它表达了连续对称性和守恒定律的一一对应。例如, 物理定律不随着时间而改变, 这表示它们有关于时间的某种对称性。想象一下, 假如重力的强度每天都有变化, 就会违反能量守恒定律, 因为我们可以在重力弱的那天把重物举起, 然后在重力强的时候放下来, 这样就得到了比我们开始输入的能量更多的能量。

自 Noether 以后, 物理学家们已经形成了这样一种思维定式: 只要发现了一种新的对称性, 就要去寻找相应的守恒定律; 反之, 只要发现了一个守恒定律, 也总要把相应的对称性找出来。

物理定律的这些对称性其实也意味着物理定律在各种变换条件下的不变性, 由物理定律的不变性, 可以得到一种不变的物理量, 称为守恒量或不变量。例如, 空间旋转最重要的参量是角动量, 如果一个物体是空间旋转对称的, 它的角动量必定是守恒的。因此, 空间旋转对称对应于角动量守恒定律。

物理定律的守恒性具有极其重要的意义, 有了这些守恒定律, 自然界的变化就呈现出一种简单、和谐、对称的关系, 也就变得易于理解了。所以, 科学家在科学研究中, 对守恒定律有一种特殊的热情和敏感, 一旦某一个守恒定律被公认以后, 人们是极不情愿把它推翻的。

因此, 当我们明白了各种对称性与物理守恒定律的对应关系后, 也就明白了

对称性原理的重要意义。无法想象一个没有对称性的世界, 物理定律也变动不定, 将是一个多么混乱、令人手足无措的世界!

设一个物理系统的 Lagrange 函数为

$$L = L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_p) \tag{13.36}$$

物理系统的泛函为

$$\begin{aligned} S &= \int_V L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_p)\mathrm{d}V \\ &= \int_V L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_p)\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\cdots\mathrm{d}x^n \end{aligned} \tag{13.37}$$

其中, 多维体积 $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\cdots\mathrm{d}x^n$。现在要研究者以下 Lie-Bäcklund 群变换下泛函的对称性。单参数 Lie-Bäcklund 群

$$\begin{aligned} \bar{x}^j &= x^j + \epsilon\xi^j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_r) \\ \bar{y}^i &= y^i + \epsilon\eta^i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_r) \\ \bar{y}^i_j &= y^i_j + \epsilon\eta^i_{[j]}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_r, \boldsymbol{y}_{r+1}) \\ \bar{y}^i_{j_1j_2} &= y^i_{j_1j_2} + \epsilon\eta^i_{[j_1j_2]}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_r, \boldsymbol{y}_{r+1}, \boldsymbol{y}_{r+2}) \\ &\vdots \\ \bar{y}^i_{j_1j_2\cdots j_p} &= y^i_{j_1j_2\cdots j_p} + \epsilon\eta^i_{[j_1j_2\cdots j_p]}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_r, \boldsymbol{y}_{r+1}, \boldsymbol{y}_{r+2}, \boldsymbol{y}_{r+p}) \end{aligned} \tag{13.38}$$

其中, 对于 p 阶有

$$\eta^i_{[j_1j_2,\cdots,j_p]} = D_{j_p}\eta_{[j_1,j_2,\cdots,j_{p-1}]} - y_{j_1j_2\cdots j_{p-1}\alpha}D_{j_p}\xi^\alpha \tag{13.39}$$

取 ϵ 的一阶项, 有坐标的变换

$$\mathrm{d}\bar{x}^j = (1 + \epsilon D_j\xi^j)\mathrm{d}x^j, \text{ 不对 } j \text{ 求和} \tag{13.40}$$

和体元的变换

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\bar{V} &= \mathrm{d}\bar{x}^1\mathrm{d}\bar{x}^2\cdots\mathrm{d}\bar{x}^n = \mathrm{d}V + \epsilon D_j\xi^j\mathrm{d}V \\ &= \mathrm{d}V\left(1 + \epsilon\sum_{j=1}^n D_j\xi^j\right), \text{ 对 } j \text{ 求和, } j = 1, 2, \cdots, n \end{aligned} \tag{13.41}$$

Lagrange 函数可展开为

$$L(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{y}}_1, \bar{\boldsymbol{y}}_2, \cdots, \bar{\boldsymbol{y}}_p) = L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_p) + \epsilon X_{[p]}L + O(\epsilon^2) + \cdots \tag{13.42}$$

其中, $X_{[p]}$ 是 p 阶的 Lie-Bäcklund 算子

$$X_{[p]} = \xi^j\frac{\partial}{\partial x^j} + \eta^i\frac{\partial}{\partial y^i} + \eta_{[j_1]}\frac{\partial}{\partial y^i_{j_1}} + \cdots + \eta^i_{[j_1j_2\cdots j_p]}\frac{\partial}{\partial y^i_{j_1j_2\cdots j_p}} \tag{13.43}$$

泛函 S 相应地变成 $\bar{S}$, 有

$$\bar{S} = S + \epsilon \int_V \{X_{[p]}L + L(D_j\xi^j)\}\mathrm{d}V + O(\epsilon^2) + \cdots \tag{13.44}$$

在 Lie 群变换下的不变性 $S = \bar{S}$ 的充分必要条件为

$$X_{[p]}L + L(D_j\xi^j) = 0 \tag{13.45}$$

在实际问题中, 以上对称性条件比较强, 因为通常问题还有边界条件。如果是全表面的积分边界条件, 就可以转化为体积分, 但如果是部分的就不能直接转化而需要引入 δ 函数。为了简单起见, 假设边界积分是在整个表面, 这时的对称性可以写为

$$X_{[p]}L + L(D_j\xi^j) = D_j\beta^j \tag{13.46}$$

根据式 (13.45), 式 (13.44) 就可以写为

$$\bar{S} = S + \epsilon \int_V \{X_{[p]}L + L(D_j\xi^j)\}\mathrm{d}V + O(\epsilon^2) + \cdots = S + \epsilon \int_{\partial V} \beta^j \mathrm{d}A_j \tag{13.47}$$

显然, 泛函的对称性必须要求

$$\int_{\partial V} \beta^j \mathrm{d}A_j = 0 \tag{13.48}$$

其中, $\mathrm{d}A_j$ 为面积 ∂V 的微元法向量坐标分量。显然, 一般的边界条件不能满足这样的强制积分条件, 对于在部分边界上的条件, 需要引入广义 δ 函数。首先把部分边界条件扩展到全部边界, 然后再转化成体积分。为了下面推导方便, 引入特征函数 Q^i, 有

$$Q^i = \eta^i - y^i_\alpha \xi^\alpha \tag{13.49}$$

那么, 利用上一节的式 (13.35) 和本节的特征函数式 (13.49), 式 (13.39) 可以改写为

$$\begin{aligned}
\eta^i_{[j_1]} &= \eta^i_{j_1} - y^i_{j_1\alpha}(D_{j_1}\xi^\alpha) = D_{j_1}\eta^i - y^i_{j_1\alpha}(D_{j_1}\xi^\alpha) \\
&= D_{j_1}(Q^i + y^i_\alpha\xi^\alpha) - y^i_{j_1\alpha}(D_{j_1}\xi^\alpha) \\
&= D_{j_1}Q^i + y^i_\alpha(D_{j_1}\xi^\alpha) + (D_{j_1}y^i_\alpha)\xi^\alpha - y^i_{j_1\alpha}(D_{j_1}\xi^\alpha) \\
&= D_{j_1}Q^i + y^i_{j_1\alpha}\xi^\alpha \\
\eta^i_{[j_1j_2]} &= D_{j_1j_2}Q^i + y^i_{j_1j_2\alpha}\xi^\alpha \\
\eta^i_{[j_1j_2j_3]} &= D_{j_1j_2j_3}Q^i + y^i_{j_1j_2j_3\alpha}\xi^\alpha \\
&\vdots \\
\eta^i_{[j_1j_2\cdots j_p]} &= D_{j_1j_2\cdots j_p}Q^i + y^i_{j_1j_2\cdots j_p\alpha}\xi^\alpha
\end{aligned} \tag{13.50}$$

利用以上关系, 式(13.46) 的左边可变为

$$X_{[p]}L + L(D_j\xi^j) = L(D_j\xi^j) + \xi^j\frac{\partial L}{\partial x^j} + \eta^i\frac{\partial L}{\partial y^i} + \eta_{[j_1]}\frac{\partial L}{\partial y^i_{j_1}} + \cdots + \eta^i_{[j_1j_2\cdots j_p]}\frac{\partial L}{\partial y^i_{j_1j_2\cdots j_p}} \tag{13.51}$$

或者

$$\begin{aligned} X_{[p]}L + L(D_j\xi^j) &= L(D_j\xi^j) + \xi^j\frac{\partial L}{\partial x^j} + \eta^i\frac{\partial L}{\partial y^i} + \\ &\quad (D_{j_1}Q^i + y^i_{j_1\alpha}\xi^\alpha)\frac{\partial L}{\partial y^i_{j_1}} + \cdots + \\ &\quad (D_{j_1j_2\cdots j_p}Q^i + y^i_{j_1j_2\cdots j_p\alpha}\xi^\alpha)\frac{\partial L}{\partial y^i_{j_1j_2\cdots j_p}} \\ &= D_j(L\xi^j) + Q^i\frac{\partial L}{\partial y^i} + (D_{j_1}Q^i)\frac{\partial L}{\partial y^i_{j_1}} + \\ &\quad (D_{j_1j_2}Q^i)\frac{\partial L}{\partial y^i_{j_1j_2}} + \cdots + (D_{j_1j_2\cdots j_p}Q^i)\frac{\partial L}{\partial y^i_{j_1j_2\cdots j_p}} \end{aligned} \tag{13.52}$$

引入 Euler 泛函算子$E_i \equiv E_{y^i}$, 则有

$$E_i() = \frac{\partial()}{\partial y^i} - D_{j_1}\frac{\partial()}{\partial y^i_{j_1}} + D_{j_1j_2}\frac{\partial()}{\partial y^i_{j_1j_2}} - \cdots + \cdots + (-1)^p D_{j_1j_2\cdots j_p}\frac{\partial()}{\partial y^i_{j_1j_2\cdots j_p}} \tag{13.53}$$

式 (13.52) 可以改写为

$$X_{[p]}L + L(D_j\xi^j) = D_j(L\xi^j) + Q^iE_i(L) + Q^iF_i(L) + Q^iG_i(L) \tag{13.54}$$

其中, 算子 F_i 和 G_i 分别为

$$F_i = D_{j_1}\frac{\partial()}{\partial y^i_{j_1}} - D_{j_1j_2}\frac{\partial()}{\partial y^i_{j_1j_2}} + \cdots + (-1)^{p-1}D_{j_1j_2\cdots j_p}\frac{\partial()}{\partial y^i_{j_1j_2\cdots j_p}} \tag{13.55}$$

$$G_i = D_{j_1}\frac{\partial()}{\partial y^i_{j_1}} + D_{j_1j_2}\frac{\partial()}{\partial y^i_{j_1j_2}} + \cdots + D_{j_1j_2\cdots j_p}\frac{\partial()}{\partial y^i_{j_1j_2\cdots j_p}} \tag{13.56}$$

利用泛函积分的分部积分, 并重复分部积分运算, 最终可以得到

$$X_{[p]}L + L(D_j\xi^j) = D_j(L\xi^j) + Q^iE_i(L) + D_{j_1}\theta^{j_1} \tag{13.57}$$

其中

$$
\begin{aligned}
\theta^{j_1} = {} & Q^i\left[\frac{\partial L}{\partial y^i_{j_1}} - D_{j_2}\frac{\partial L}{\partial y^i_{j_1j_2}} + D_{j_2j_3}\frac{\partial L}{\partial y^i_{j_1j_2j_3}} + \cdots + (-1)^{p-1}D_{j_2\cdots j_p}\frac{\partial L}{\partial y^i_{j_1j_2\cdots j_p}}\right] + \\
& D_{j_2}Q^i\left[\frac{\partial L}{\partial y^i_{j_1j_2}} - D_{j_3}\frac{\partial L}{\partial y^i_{j_1j_2j_3}} + D_{j_3j_4}\frac{\partial L}{\partial y^i_{j_1j_2j_3j_4}} + \cdots + \right. \\
& \left.(-1)^{p-2}D_{j_3j_4\cdots j_p}\frac{\partial L}{\partial y^i_{j_1j_2\cdots j_p}}\right] + \\
& D_{j_2j_3}Q^i\left[\frac{\partial L}{\partial y^i_{j_1j_2j_3}} - D_{j_4}\frac{\partial L}{\partial y^i_{j_1j_2j_3j_4}} + \cdots + (-1)^{p-3}D_{j_4\cdots j_p}\frac{\partial L}{\partial y^i_{j_1j_2\cdots j_p}}\right] + \cdots + \\
& D_{j_1j_2\cdots j_{p-1}}Q^i\left(\frac{\partial L}{\partial y^i_{j_1j_2\cdots j_{p-1}}} - D_{j_p}\frac{\partial L}{\partial y^i_{j_1j_2\cdots j_p}}\right) + \\
& D_{j_1j_2\cdots j_p}Q^i\left(\frac{\partial L}{\partial y^i_{j_1j_2\cdots j_p}}\right)
\end{aligned}
\tag{13.58}
$$

这样泛函最终变为

$$
\bar{S} = S + \epsilon\int[Q^iE_i(L) + D_{j_1}(L\xi^{j_1} + \theta^{j_1})]\mathrm{d}V \tag{13.59}
$$

由于积分体积是任意的, 所以 Lie 群对称性就必须要求积分函数等于零, 即 $Q^iE_i(L) + D_{j_1}(L\xi^{j_1} + \theta^{j_1}) = 0$, 这就得到 Noether 守恒律。

定理 13.1 (Noether 守恒律) 设 $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_p)$ 是可微函数。作用量为

$$
\begin{aligned}
S &= \int_V L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_p)\mathrm{d}V \\
&= \int_V L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_p)\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\cdots\mathrm{d}x^n
\end{aligned}
\tag{13.60}
$$

当且仅当

$$
Q^iE_i(L) + D_{j_1}(L\xi^{j_1} + \theta^{j_1}) = D_{j_1}\beta^{j_1} \tag{13.61}
$$

泛函 [式 (13.60)] 在 Lie-Bäcklund 变换下保持不变。其中, 无穷小生成元向量分量为 (ξ^j, η^i) $(j = 1, \cdots, n; i = 1, \cdots, m)$, $Q^i = \eta^i - y^i_\alpha\xi^\alpha$, 以及 $\int\beta^j\mathrm{d}A_j = 0$, 向量分量 θ^{j_1} 为

$$
\begin{aligned}
\theta^{j_1} = {} & Q^i\left[\frac{\partial L}{\partial y^i_{j_1}} + \sum_{k=2}^{p}(-1)^{k-1}D_{j_2\cdots j_k}\frac{\partial L}{\partial y^i_{j_1\cdots j_k}}\right] + \\
& \sum_{\lambda=2}^{p-1}\left\{(D_{j_2\cdots j_\lambda}Q^i)\left[\frac{\partial L}{\partial y^i_{j_1\cdots j_\lambda}} + \sum_{k=2}^{p-1}(-1)^{k-\lambda+1}D_{j_{\lambda+1}\cdots j_{k+1}}\frac{\partial L}{\partial y^i_{j_1\cdots j_{\lambda+1}\cdots j_{k+1}}}\right]\right\} + \\
& (D_{j_2\cdots j_p}Q^i)\left(\frac{\partial L}{\partial y^i_{j_1j_2\cdots j_p}}\right), \quad j_1 = 1, \cdots, n
\end{aligned}
\tag{13.62}
$$

在对称性条件式 (13.61) 中, 如果泛函 S 的变分为零, 可以导出通常的 Euler-Lagrange 方程, 这时

$$E_i(L) = \frac{\partial L}{\partial y^i} + \sum_{k=1}^{p}(-1)^k D_{j_1 j_2 \cdots j_k} \frac{\partial L}{\partial y^i_{j_1 \cdots j_k}} = 0 \tag{13.63}$$

那么就必有

$$D_j(L\xi^j + \theta^j - \beta^j) = 0 \tag{13.64}$$

用 $J^i = L\xi^j + \theta^j - \beta^j$ 代表 Noether 流, 式 (13.64) 表明 Noether 流是一个守恒量, 式(13.64) 是一个守恒律。

这就是说泛函满足 Lie 群对称性条件就一定导致守恒律。这个定律在物理上非常有用。

从物理上说, Lie 群对称性条件本质对应物理守恒律, 或者说物理定律必须是 Lie 群对称的。如果不满足 Lie 群对称性, 就是对称破缺。对称破缺的情况多发生在边界条件和初始条件的引入。流体中的湍流本质上就是由于对称破缺引起的。

用 Lie 群和 Noether 守恒律研究力学的 Hamilton 系统是一个很活跃并且内容非常丰富的领域, 想要学习的读者, 可以参考文献 [88]~[94]。

例 13.1 设现有薄板的厚度为 h, 密度为 ρ 和挠度为 w, 其小挠度横向振动问题的控制方程是四阶偏微分方程

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \tag{13.65}$$

如果引入时间变量 $\tau = t\sqrt{\rho h}$, 以上方程可以改为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \tag{13.66}$$

对应的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}w_t^2 - (w_{xx} + w_{yy})^2 \tag{13.67}$$

式 (13.66) 在时间平移变换 $X = \partial/\partial t$ 保持不变。这个对称性的 Noether 流为

$$J^{j_1} = L\xi^{j_1} + \theta^{j_1} \tag{13.68}$$

其中

$$\theta^{j_1} = Q^i \left(\frac{\partial L}{\partial y^i_{j_1}} - D_{j_2} \frac{\partial L}{\partial y^i_{j_1 j_2}} \right) + D_{j_2} Q^i \frac{\partial L}{\partial y^i_{j_1 j_2}} \tag{13.69}$$

对于这个问题, 有

$$\eta = 0, \quad \xi^t = 1, \quad \xi^x = 0, \quad \xi^y = 0 \tag{13.70}$$

对应的 Noether 流为

$$J^t = L + \theta^t, \quad J^x = \theta^x, \quad J^y = \theta^y \tag{13.71}$$

其中

$$\begin{aligned}\theta^t = &-w_t\left(\frac{\partial L}{\partial w_t} - D_t\frac{\partial L}{\partial y_{tt}} - D_x\frac{\partial L}{\partial w_{tx}} - D_y\frac{\partial L}{\partial w_{ty}}\right) + \\ &D_t(-w_t)\frac{\partial L}{\partial w_{tt}} + D_x(-w_t)\frac{\partial L}{\partial w_{tx}} + D_y(-w_t)\frac{\partial L}{\partial w_{ty}} \\ = &-(w_t)^2 = -w_t^2\end{aligned} \tag{13.72}$$

$$\begin{aligned}\theta^x = &-w_t\left(\frac{\partial L}{\partial w_x} - D_t\frac{\partial L}{\partial y_{xt}} - D_x\frac{\partial L}{\partial w_{xx}} - D_y\frac{\partial L}{\partial w_{xy}}\right) + \\ &D_t(-w_t)\frac{\partial L}{\partial w_{xt}} + D_x(-w_t)\frac{\partial L}{\partial w_{xx}} + D_y(-w_t)\frac{\partial L}{\partial w_{xy}} \\ = &2D_x w_t(w_{xx} + w_{yy}) - 2w_t D_x(w_{xx} + w_{yy})\end{aligned} \tag{13.73}$$

$$\begin{aligned}\theta^y = &-w_t\left(\frac{\partial L}{\partial w_y} - D_t\frac{\partial L}{\partial y_{yt}} - D_x\frac{\partial L}{\partial w_{yx}} - D_y\frac{\partial L}{\partial w_{yy}}\right) + \\ &D_t(-w_t)\frac{\partial L}{\partial w_{yt}} + D_x(-w_t)\frac{\partial L}{\partial w_{yx}} + D_y(-w_t)\frac{\partial L}{\partial w_{yy}} \\ = &2D_y w_t(w_{xx} + w_{yy}) - 2w_t D_y(w_{xx} + w_{yy})\end{aligned} \tag{13.74}$$

代入守恒律 $D_j(L\xi^j + \theta^j - \beta^j) = 0$, 即得到薄板振动的守恒律如下:

$$\begin{aligned}D_j(L\xi^j + \theta^j - \beta^j) = &D_t(L\xi^t + \theta^t - \beta^t) + D_x(L\xi^x + \theta^x - \beta^x) + \\ &D_y(L\xi^y + \theta^y - \beta^y) = 0\end{aligned} \tag{13.75}$$

即有薄板振动的守恒律

$$\begin{aligned}&D_t\left[\frac{1}{2}w_t^2 + (w_{xx} + w_{yy})^2\right] + \\ &D_x[2w_t D_x(w_{xx} + w_{yy}) - 2(w_{xx} + w_{yy})D_x(w_t)] + \\ &D_y[2w_t D_y(w_{xx} + w_{yy}) - 2(w_{xx} + w_{yy})D_y(w_t)] = 0\end{aligned} \tag{13.76}$$

13.4 Ibragimov 守恒律

虽然 Noether 守恒律非常有用, 但不是所有的方程都有对应的泛函, 例如简单的演化方程。如何对这类方程使用 Noether 守恒律就成为一个难题。Ibragimov[95] 提出了一个推广方案, 证明了任何微分方程系统, 只要所含方程的

个数与其中因变量的个数相同, 则它的任意一个 Lie 群对称称为 Lie-Bäcklund 对称。Lie-Bäcklund 对称是在 Lie 群基础上的一种推广 [96], 或非局部对称都对应一个守恒律。不过, 这个对应的守恒律中会包含一些 "没有物理意义" 的变元, 因而也称为非局部守恒律。为了得到局部守恒律, 人们需要考虑方程的自伴性。若方程具有某一自伴性, 则那些 "没有物理意义" 的变元可以除去, 从而得到局部守恒律。否则, 研究对象的局部守恒律不存在。尽管如此, 那些非局部的守恒律形式仍旧反映了原方程的对称性。利用对称对方程进行降阶有助于方程的求解。有时, 直接依靠方程的非平凡的局部守恒律也可得到方程的一些特解。

如给定一个演化方程

$$F[x, u, u_{(1)}, \cdots, u_{(s)}] = 0 \tag{13.77}$$

$x = (x^1, x^2)$ 为自变量, u 为因变量, 其中 $u_{(1)} = \{u_i\}$, $u_{(2)} = \{u_{ij}\}$, $\cdots$ 表示一阶导数, 高价导数即 $u_i = \partial u/\partial x^i$, $u_{ij} = \partial^2 u/\partial x^i \partial x^j$。

定义 13.1 式 (13.77) 的自伴方程为

$$F^*[x, u, v, u_{(1)}, v_{(1)}, \cdots, u_{(s)}, v_{(s)}] = 0 \tag{13.78}$$

以及

$$F^*[x, u, v, u_{(1)}, v_{(1)}, \cdots, u_{(s)}, v_{(s)}] = \frac{\delta(vF)}{\delta v} \tag{13.79}$$

其中, $v = v(x^1, x^2)$ 是一个乘子。$\delta()/\delta v$ 是上面的 Euler 算子, 一般的表达式为

$$\frac{\delta()}{\delta v} = \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s D_{i_1} \cdots D_{i_s} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \cdots i_s}} \tag{13.80}$$

全导数算子为

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial}{\partial u} + u_{ij} \frac{\partial}{\partial u_j} + \cdots \tag{13.81}$$

把式 (13.80) 展开为方程组, 即

$$\begin{cases} \dfrac{\delta(vF)}{\delta v} = F[x, u, u_{(1)}, \cdots, u_{(s)}] = 0 \\ \dfrac{\delta(vF)}{\delta u} = F^*[x, u, v, u_{(1)}, v_{(1)}, \cdots, u_{(s)}, v_{(s)}] = 0 \end{cases} \tag{13.82}$$

Ibragimov[95] 证明式 (13.82) 与式 (13.77) 具有完全一样的 Lie 群对称性。这样就可以得到相应的守恒律。

定理 13.2 式 (13.77) 的任何 Lie 群, Lie-Bäcklund 或是非局部对称性

$$X = \xi^i[x, u, u_{(1)}, \cdots] \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta[x, u, u_{(1)}, \cdots] \frac{\partial}{\partial u} \tag{13.83}$$

都对应一个守恒律

$$D_i(C^i) = 0 \tag{13.84}$$

其中, C^i 为守恒量, 定义为

$$
\begin{aligned}
C^i = \xi^i \mathcal{L} + w \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} - D_j \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ij}} \right) + D_j D_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijk}} \right) - \cdots \right] + \\
D_j(w) \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ij}} - D_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijk}} + D_k D_r \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijkr}} \right) - \cdots \right] + \\
D_j D_k(w) \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijk}} - D_r \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijkr}} \right) + \cdots \right] + \cdots
\end{aligned} \tag{13.85}
$$

其中, 特征函数 w 和泛函 $\mathcal{L}$ 的定义如下:

$$
w = \eta - \xi^j u_j, \quad \mathcal{L} = vF[x, u, u_{(1)}, \cdots, u_{(s)}] \tag{13.86}
$$

例如, 对于二阶方程, 式 (13.85) 变为

$$
C^i = \xi^i \mathcal{L} + w \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} - D_j \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ij}} \right) \right] + D_j(w) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ij}} \tag{13.87}
$$

根据定理 13.2, 式 (13.77) 的每一个对称性都对应一个守恒律。不过, 这些守恒律除了原变量还包括一个额外的乘子 v。当式 (13.77) 为自伴方程时, 这个额外的乘子 v 可以消除。自伴方程的定义如下:

定义 13.2 如果式 (13.77) 可以在 $v = u$ 时由下面的方程得到

$$
F^*[x, u, v, u_{(1)}, v_{(1)}, \cdots, u_{(s)}, v_{(s)}] = 0 \tag{13.88}
$$

那么式 (13.77) 就是自伴方程。或者, 如果

$$
\begin{aligned}
& F^*[x, u, v, u_{(1)}, v_{(1)}, \cdots, u_{(s)}, v_{(s)}]|_{v=u} \\
= & \phi[x, u, u_{(1)}, \cdots] F[x, u, u_{(1)}, \cdots, u_{(s)}]
\end{aligned} \tag{13.89}
$$

就说式 (13.77) 是自伴方程。

第十四章

Lie 群对称方法的外微分形式

微分形式提供一种微分方程的现代表示, 可以对问题给出更直观的结果[97]。

14.1 微分形式简介

微分形式是多变量微积分、微分拓扑和张量分析领域的一个数学概念。现代意义上的微分形式, 及其以楔积和外微分结构形成于外代数的想法, 都是由法国数学家 Elie Cartan 引入的。他的学生陈省身在其《微分几何讲义》中对微分形式做了非常好的介绍[98]。有关微分形式的介绍可以参考有关书籍[98]。

外微分形式可以说是这样的一些量, 在它们上面可以进行外积 (即反对称化的直积) 运算、外微分 (与微分算子的外积) 运算以及积分运算。用外微分形式表述的物理定律具有特别简洁的形式, 而且计算是自然的和自动的, 不受空间维数的限制, 也不必记住向量分析中的许多公式。

微分的外积定义: 对于三维空间中自变量的微分 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$, 其外积运算用 $\wedge$ 表示, 如 $\mathrm{d}x$ 与 $\mathrm{d}y$ 的外积记为 $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, 它们满足以下运算法则:

(1) $a\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = a(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)$ (是实数)。

(2) 外积运算对加法有分配律, 即 $\mathrm{d}x \wedge (\mathrm{d}y + \mathrm{d}z) = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$。

(3) 反交换律, 即任何两个微分的外积交换次序后变号, 即 $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -\mathrm{d}y \wedge$

$\mathrm{d}x$。

(4) 任意一个微分与自身的外积等于 0, 即 $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = 0$。

(5) 结合律, 即 $\mathrm{d}x \wedge (\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) = (\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) \wedge \mathrm{d}z$。

如果 A, B, C 为任意三维空间的函数, 有

(1) 零次微分形式: 普通函数 $f(x, y, z)$。

(2) 一次微分形式: $A\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + C\mathrm{d}z$。

(3) 二次微分形式: $A\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + B\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y + C\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$。

(4) 三次微分形式: $A\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$。

性质 1 (Poincáre 引理) 设 ω 是三维空间中的任意外微分式, 其系数有二阶连续偏导数, 则

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}^2\omega = 0 \tag{14.1}$$

性质 2 (Poincáre 引理之逆) 设 ω 是三维空间中的 p 阶外微分式, 其系数有一阶连续偏导数, 且 $\mathrm{d}\omega = 0$, 则存在一个 $(p-1)$ 阶外微分式 λ, 使得

$$\omega = \mathrm{d}\lambda \tag{14.2}$$

对于微分形式 $\omega, \mathrm{d}\omega$ 是它的外微分, Σ 是 ω 的封闭积分区域, $\partial\Sigma$ 表示 Σ 的边界, 有一般的 Stokes 积分公式

$$\int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} \mathrm{d}\omega \tag{14.3}$$

这个公式是说高次的外微分形式 $\mathrm{d}\omega$ 在区域上的积分等于低一次的外微分形式ω 在区域的低一维空间的边界上的积分。这个公式的二维形式首先是由自学成才的 George Green 于 1828 年发现的, 称为 Green 积分公式, 其三维形式是由 G. Stokes 于 1854 年发现的。

一个向量 (算子) $\boldsymbol{V} = v^k(x^i)(\partial/\partial x^k)$ 将一个函数 $f(x^i)$ 映射成一个实数, 一个微分形式 $\sigma = \sigma_k(x^i)\mathrm{d}x^k$, 它们之间的缩并 (contraction) 运算记为 $\boldsymbol{V} \lrcorner \sigma = v^k\sigma_k$。

一个函数 f 的微分是一次微分形式, $\mathrm{d}f = f_{,k}\mathrm{d}x^k = \partial_{x^k} f \mathrm{d}x^k$, 这样就有 $\boldsymbol{V}f = \boldsymbol{V} \lrcorner f = v^k f_{,k}$。

对于向量 $\boldsymbol{V}$ 的 Lie 导数是 $\mathfrak{L}_{\boldsymbol{V}}$, 向量 $\boldsymbol{A}$ 沿向量 $\boldsymbol{V}$ 的 Lie 导数定义为 $\mathfrak{L}_{\boldsymbol{V}} = [\boldsymbol{V}, \boldsymbol{A}] = -[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{V}] = -\mathfrak{L}_{\boldsymbol{A}}$。函数分 Lie 导数就是沿向量 $\boldsymbol{V}$ 的方向导数, 即 $\mathfrak{L}_{\boldsymbol{V}} f = \boldsymbol{V}f = \boldsymbol{V} \lrcorner \mathrm{d}f = v^k f_{,k}$。

对于微分形式 ω, Lie 导数与外微分有下列关系:

$$\mathfrak{L}_{\boldsymbol{V}}\omega = \boldsymbol{V} \lrcorner \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}(\boldsymbol{V} \lrcorner \omega) \tag{14.4}$$

$$\mathfrak{L}_{\boldsymbol{V}}\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\mathfrak{L}_{\boldsymbol{V}}\omega \tag{14.5}$$

14.2 微分方程的微分形式

设有一个二阶微分方程 $y'' = f(x, y, y')$, 可以等价地改写为一阶微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p, \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = f(x, y, y') \tag{14.6}$$

或者 $\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x, \mathrm{d}p = f\mathrm{d}x$。

引入微分形式 α_i

$$\alpha_1 = \mathrm{d}y - p\mathrm{d}x, \quad \alpha_2 = \mathrm{d}p - f\mathrm{d}x \tag{14.7}$$

当 $\alpha_i = 0$ 时, 式 (14.7) 等价于式 (14.6) 和原方程。由于有外微分运算

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\alpha_1 &= \mathrm{d}^2 y - \mathrm{d}(p\mathrm{d}x) \\
&= 0 - \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}x - p \wedge \mathrm{d}^2 x \\
&= -\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}x \\
&= \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}p \\
&= \mathrm{d}x \wedge (\alpha_2 + f\mathrm{d}x) \\
&= \mathrm{d}x \wedge \alpha_2 \\
\mathrm{d}\alpha_2 &= -\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x \\
&= -(f_{,x}\mathrm{d}x + f_{,y}\mathrm{d}y + f_{,p}\mathrm{d}p) \wedge \mathrm{d}x \\
&= -f_{,y}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x - f_{,p}\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}x \\
&= -f_{,y}(\alpha_1 + p\mathrm{d}x) \wedge \mathrm{d}x - f_{,p}(\alpha_2 + f\mathrm{d}x) \wedge \mathrm{d}x \\
&= f_{,y}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}\alpha_1 + f_{,p}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}\alpha_2
\end{aligned} \tag{14.8}$$

二次微分形式 $\mathrm{d}\alpha_i$ 是一次微分形式 α_i 的线性关系, 并且当 $\alpha_i = 0$ 时为零。

14.3 微分方程对称的微分形式

Lie 群对称性条件用微分形式的表述就是 α_i 对于无穷小生成元$X = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \eta_1\partial_p$ 的 Lie 导数为一次微分形式 α_i 的线性关系, 并且当 $\alpha_i = 0$ 时为零, 即

$$\mathfrak{L}_X \alpha_1 = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 \tag{14.9}$$

$$\mathfrak{L}_X \alpha_2 = c_3\alpha_1 + c_4\alpha_2 \tag{14.10}$$

其中, c_1, c_2, c_3, c_4 为 x, y 和 p 的函数。

由式 (14.4) 得到

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{L}_X\alpha_1 &= X\lrcorner\mathrm{d}\alpha_1 + \mathrm{d}(X\lrcorner\alpha_1) \\
&= (\xi\partial_x + \eta\partial_y + \eta_1\partial_p)\lrcorner\mathrm{d}(\mathrm{d}y - p\mathrm{d}x) + \mathrm{d}[(\xi\partial_x + \eta\partial_y + \eta_1\partial_p)\lrcorner(\mathrm{d}y - p\mathrm{d}x)] \\
&= (\xi\partial_x + \eta\partial_y + \eta_1\partial_p)\lrcorner(-\mathrm{d}p\wedge\mathrm{d}x) + \mathrm{d}(-p\xi + \eta) \\
&= \xi\mathrm{d}p - \eta_1\mathrm{d}x + \mathrm{d}(-p\xi + \eta) \\
&= \xi\mathrm{d}p - \eta_1\mathrm{d}x - \xi\mathrm{d}p - p\mathrm{d}\xi + \mathrm{d}\eta = -\eta_1\mathrm{d}x - p\mathrm{d}\xi + \mathrm{d}\eta \\
&= c_1(\mathrm{d}y - p\mathrm{d}x) + c_2(\mathrm{d}p - f\mathrm{d}x)
\end{aligned} \tag{14.11}
$$

整理后有

$$
\begin{aligned}
&(\eta_1 + \eta_x - p\xi_x)\mathrm{d}x + (\eta_y - p\xi_y)\mathrm{d}y + (\eta_p - p\xi_p)\mathrm{d}p \\
&= (c_1p - c_2f)\mathrm{d}x + c_1\mathrm{d}y + c_2\mathrm{d}p
\end{aligned} \tag{14.12}
$$

比较 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}p$ 前的系数得到 $c_1 = \eta_y - p\xi_y, c_2 = \eta_y - p\xi_p$ 和

$$
\eta_1 = \eta_x - p\eta_y + f\eta_p - p(\xi_x + p\xi_y + f\xi_p) \tag{14.13}
$$

如果把 $p = y'$ 代回, 即可以得到

$$
\eta_1 = \eta_x - y'\eta_y + f\eta_{y'} - y'(\xi_x + y'\xi_y + f\xi_{y'}) \tag{14.14}
$$

就与式 (8.67) 的结果完全一样, 即用全导数表示的 $\eta_1 = [D(\eta) - y'D(\xi)]|_{y''=f}$。

用同样的办法可以确定 $c_3 = \eta_y - f\xi_y, c_4 = \eta_p - f\xi_p$, 从而有

$$
\xi f_x + \eta f_y + \eta_1 f_p - (\eta_x + p\eta_y + f\eta_p) + f(\xi_x + \eta\xi_y + f\xi_p) = 0 \tag{14.15}
$$

这个方程其实是生成元一次延拓的决定方程 [式 (9.9)]。

对于高次延拓的情况也可以用类似的方法求得。对于一个因变量 u 和多个自变量 x^i 的拟线性方程

$$
\alpha = \mathrm{d}u - p_i\mathrm{d}x^i \tag{14.16}
$$

Lie 群对称性条件可以表示为

$$
\mathfrak{L}_X\alpha = \lambda\alpha \tag{14.17}
$$

其中, $X = \xi^i\partial/\partial x^i + \eta\partial/\partial u + \eta_i\partial/\partial p_i$ 对于一个因变量和多个自变量的情况有

$$
\lambda\alpha = \mathfrak{L}_X\alpha = (X\lrcorner\mathrm{d}\alpha) + \mathrm{d}(X\lrcorner\alpha) = \mathrm{d}(\eta - \xi^ip_i) + \xi^i\mathrm{d}p_i - \eta_i\mathrm{d}x^i \tag{14.18}
$$

由于 x^i, u, p_i 相互独立, 可以确定 $\lambda = \eta_u - p_i\xi^i_u$, 从而 Lie 群对称性条件的决定方程为

$$
\eta_i = \eta_i + p_i\eta_u - p_k(\xi^k_i - p\xi^k_u) \tag{14.19}
$$

其中, $p_i = u_i$。

第十五章

Lie 群对称方法的软件系统

用 Lie 群对称方法求解微分方程, 优点是系统化, 既可以求解线性方程, 也可以求解非线性方程, 方程可以是常微分方程也可以是偏微分方程。但是也有一个比较明显的不足, 就是算子运算太多太长, 一般情况下都非常复杂, 不便于手算。这也是 140 年前提出的 Lie 群对称方法为什么到现在还不能特别普及的一个重要原因。

由于算子运算通用软件的发展, 这样的情况发生了很大的变化。目前, Maple、Mathematica 等商用软件都具有处理 Lie 群变换的功能。其中, Lie 群对称方法的无穷小生成元的运算都可以使用这些软件来协助进行。

一般简单问题使用交互式命令环境解决问题已经足够了, 但如果要解决一系列同一类型的问题, 可以编写需要的解决特定问题的函数和程序。

15.1 Mathematica

Mathematica 是由 Stephen Wolfram 领导的 Wolfram 研究公司开发的一款广泛使用的科学计算软件。它拥有强大的数值计算和符号运算能力, 是目前为止使用最广泛的数学软件之一。Wolfram 语言是用于 Mathematica 的编程语言。

Mathematica 是一款应用领域相当广泛的优秀数学软件。1986 年, Wolfram

和他的工作团队开始研发 Mathematica。1988 年 1 月 23 日, Mathematica 1.0 正式发行。2008 年 12 月发行的 Mathematica 7.0 已经有相应的中文版本。Mathematica 8.0 也已经于 2010 年 11 月和 2010 年 12 月分别推出了相应的英文版和日文版。

Mathematica 程序设计语言以 "条目重写" 为基础, 并支持函数式和过程式程序设计 (尽管一般来说, 函数式程序设计更为高效)。Mathematica 的一项特色是, 新的代码是以程序包的形式添加的, 例如 Mathematica 语言中的文本文件。

Brian J. Cantwell 的专著 *Introduction to Symmetry Analysis* 配有基于 Mathematica 编写的程序, 可以下载: http://web.stanford.edu/ cantwell/SymmetryAnalysisSoftware/。

15.2 Maple

1980 年 9 月, 加拿大 Waterloo 大学的符号计算机研究小组成立, 开始了符号运算在计算机上实现的研究项目, 数学软件 Maple 是这个项目的产品。目前, 这仍是一个正在研究的项目。

Maple 是一个具有强大符号运算能力、数值计算能力、图形处理能力的交互式计算机代数系统 (computer algebra system)。它可以借助键盘和显示器代替原来的笔和纸进行各种科学计算、数学推理、猜想证明以及智能化文字处理。

Maple 这个超强数学工具不仅适合数学家、物理学家、工程师, 还适合化学家、生物学家和社会学家。总之, 它适合于所有需要科学计算的人。

Maple 软件主要由 3 个部分组成: 用户界面、代数运算器、外部函数库。用户界面和代数运算器是用 C 语言写成的, 只占整个软件的一小部分。当系统启动时, 即被装入, 主要负责输入命令和算式的初步处理、显示结果、函数图像的显示等。代数运算器负责输入的编译、基本的代数运算 (如有理数运算、初等代数运算等) 以及内存的管理。Maple 的大部分数学函数和过程是用 Maple 自身的语言写成的, 存于外部函数库中。当一个函数被调用时, 在多数情况下, Maple 会自动将该函数的过程调入内存, 一些不常用的函数才需要用户自己调入, 如线性代数包、统计包等, 这使得 Maple 在资源的利用上具有很大的优势, 只有最有用的东西才留驻内存, 这保证了 Maple 可以在较小内存的计算机上正常运行。用户可以查看 Maple 的非内存函数的源程序, 也可以将自己编的函数、过程加到 Maple 的程序库中, 或建立自己的函数库。

例如在 Maple 中, 有一个程序包 *symgen*, 在打开 Maple 的状态下, 在命令行输入

$$with(DEtools, symgen);$$

Maple 就会生成

$$[symgen]$$

这时就可以用来确定方程的 ξ, η, 即无穷小生成元向量的系数。例如, 非线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x + \cos[\mathrm{e}^{-x}(1+x) + \mathrm{e}^{y}]}{\mathrm{e}^{x+y}} \tag{15.1}$$

$$ode := diff(y(x), x) = (x + cos(exp(-x) * (1 + x) + exp(y(x))))/exp(x + y(x))$$

使用命令

$$symgen(ode, HINT = [f(x), x * g(y)])$$

就会得到

$$[\xi = exp(x), \eta = xexp(-y)]$$

对于方程 $y''' = y^{-3}$

$$symgen(ode1, HINT = [f(x), x * g(y)])$$

可以得到对应方程的 Lie 群对称性

$$[\xi = 1, \eta = 0], \quad \left[\xi = \frac{4}{3}x, \eta = y\right]$$

可以看出, 确定方程的对称性的工作完全可以由程序来完成。有了对称性, 就可以确定不变量, 从而简化原方程, 以便求解。当然, Maple 的功能强大, 也可以直接用来求精确解。例如, 二阶非线性微分方程

$$y'' = y^{-1}(y')^2 - y \tag{15.2}$$

马上就可以得到其解

$$y = \frac{1}{2C_1^2}\left[1 - \tanh\left(\frac{C_2 + x}{2C_1}\right)^2\right] \tag{15.3}$$

第十六章 Lie 群的应用

Lie 群方法可以应用到任何领域, 这里列出的几个典型应用, 分别取自不同的书籍和最近发表的论文, 希望可以尽量反映本书基本理论的应用。

16.1 传热问题

这个问题在开始的时候讨论过, 现在再重新考察传热方程 $u_t = u_{xx}$ 的解[81]。

这个问题有两个自变量 x, t, 一个因变量 $u(x,t)$, 对于这个偏微分方程, 有无穷小生成元

$$X = \xi(x,t,u)\partial_x + \tau(x,t,u)\partial_y + \eta(x,t,u)\partial_u \tag{16.1}$$

对应于这个二阶偏微分方程的无穷小生成元的二次延拓为

$$X^{(2)} = X + \eta_1^x \partial_{u_x} + \eta_1^t \partial_{u_t} + \eta_2^{xx} \partial_{u_{xx}} + \eta_2^{xt} \partial_{u_{xt}} + \eta_2^{tt} \partial_{u_{tt}} \tag{16.2}$$

其中的系数见式 (12.6) 和式 (12.10)。将 $X^{(2)}$ 作用于方程 $u_t = u_{xx}$ 的两边, 得到

$$\eta_1^t = \eta_2^{xx} \tag{16.3}$$

把式 (12.6) 和式 (12.10) 的相关式代入上式, 可得决定方程。有关 u 的不同组合的系数如表 16.1 所示。

表 16.1 传热问题方程系数表

组合	系数	编号
$u_x u_{xt}$	$-2\tau_u = 0$	(a)
u_{xt}	$-2\tau_x = 0$	(b)
u_{xx}^2	$-\tau_u = -\tau_u$	(c)
$u_x^2 u_{xx}$	$-\tau_{uu} = 0$	(d)
$u_x u_{xx}$	$2\tau_{xu} - 3\xi_u = -\xi_u$	(e)
u_{xx}	$-\tau_{xx} + \eta_u - 2\xi_x = \eta_u - \tau_t$	(f)
u_x^3	$-\xi_{uu} = 0$	(g)
u_x^2	$\eta_{uu} - 2\xi_{xu} = 0$	(h)
u_x	$2\eta_{xu} - \xi_{xx} = -\xi_t$	(i)
1	$\eta_t = \eta_{xx}$	(j)

由 (a) 和 (b) 可知, τ 只是 t 的函数, (e) 表明 ξ 与 u 无关, 由 (f) 得到 $\xi(x,t) = 1/2\tau_t x + \sigma(t), \sigma$ 是 t 的函数。由 (h) 知道 η 是 u 的线性函数, 即

$$\eta(x,t,u) = \beta(x,t,u)u + \alpha(x,t) \tag{16.4}$$

由 (i) 得到 $\xi_t = -\beta_x, \beta$ 为 x 的二次函数, 即

$$\beta = \frac{1}{8}\tau_{tt}x^2 - \frac{1}{2}\sigma_t x + \rho(t) \tag{16.5}$$

最后由 (j) 得知, α, β 是传热方程的解, 即

$$\alpha_t = \alpha_{xx}, \quad \beta_t = \beta_{xx} \tag{16.6}$$

利用前面得到的 β, 可以得到

$$\tau_{ttt} = 0, \quad \sigma_{tt} = 0, \quad \rho_t = -\frac{1}{4}\tau_{tt} \tag{16.7}$$

积分后得到

$$\begin{aligned} \xi &= c_1 + c_4 x + 2c_5 t + 4c_6 xt \\ \tau &= c_2 + 2c_4 t + 4c_6 t^2 \\ \eta &= (c_3 - c_5 x - 2c_6 t - c_6 x^2)u + \alpha(x,t) \end{aligned} \tag{16.8}$$

其中, c_i $(i = 1, \cdots, 6)$ 是任意常数, α 是传热方程的任意一个解。

这样传热方程的无穷小对称性的 Lie 代数展开为 6 个向量场

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \partial_x \\
X_2 &= \partial_t \\
X_3 &= u\partial_u \\
X_4 &= x\partial_x + 2\partial_t \\
X_5 &= 2t\partial_x - xu\partial_u \\
X_6 &= 4tx\partial_x + 4t^2\partial_t - (x^2+2t)u\partial_u
\end{aligned}
\tag{16.9}
$$

和 1 个无穷维子代数

$$
X_\alpha = \alpha(x,t)\partial_u \tag{16.10}
$$

向量场的交换子 $[X_i, X_j]$ 结构系数如表 16.2 所示。其中, $\alpha' = x\alpha_x + 2t\alpha_t$, $\alpha'' = 2t\alpha_x + x\alpha$, $\alpha''' = 4tx\alpha_x + 4t^2\alpha_t + (x^2+2t)\alpha$。对应于 X_i 的 Lie 群 G_i 可以利用以前得到的变换关系 $\mathrm{e}^{\epsilon X_i}(x,t,u) = (\hat{x},\hat{t},\hat{u})$, 简单计算后得到

$$
\begin{aligned}
&G_1 : (x+\epsilon, t, u) \\
&G_2 : (x, t+\epsilon, u) \\
&G_3 : (x, t, \mathrm{e}^\epsilon u) \\
&G_4 : (\mathrm{e}^\epsilon x, \mathrm{e}^{2\epsilon} t, u) \\
&G_5 : (x+2\epsilon t, t, u\exp(-\epsilon x - \epsilon^2 t)) \\
&G_6 : \left(\frac{x}{1-4\epsilon t}, \frac{t}{1-4\epsilon t}, u\sqrt{1-4\epsilon t}\exp\left(\frac{-\epsilon x^2}{1-4\epsilon t}\right)\right) \\
&G_\alpha : (x, t, u+\epsilon\alpha(x,t))
\end{aligned}
\tag{16.11}
$$

由于每一个 G_i 都是传热方程的对称群, 所以如果 $u = f(x,t)$ 是传热方程的解, 那么以下的每一个表达式也都是方程的解:

$$
\begin{aligned}
u^{(1)} &= f(x-\epsilon, t) \\
u^{(2)} &= f(x, t-\epsilon) \\
u^{(3)} &= \mathrm{e}^\epsilon f(x,t) \\
u^{(4)} &= f(\mathrm{e}^{-\epsilon}x, \mathrm{e}^{-2\epsilon}t) \\
u^{(5)} &= \mathrm{e}^{-\epsilon x + \epsilon^2 t} f(x-2\epsilon t, t) \\
u^{(6)} &= \frac{1}{\sqrt{1+4\epsilon t}}\exp\left(\frac{-\epsilon x^2}{1+4\epsilon t}\right) f\left(\frac{x}{1+4\epsilon t}, \frac{t}{1+4\epsilon t}\right) \\
u^{(\alpha)} &= f(x,t) + \epsilon\alpha(x,t)
\end{aligned}
\tag{16.12}
$$

其中, ϵ 为任意实数, $\alpha(x,t)$ 为传热方程的任意一个解。

表 16.2 传热问题 Lie 代数结构系数表

$[X_i, X_j]$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_α
X_1	0	0	0	X_1	$-X_3$	$2X_5$	X_{α_x}
X_2	0	0	0	$2X_2$	$2X_1$	$4X_4-2X_3$	X_{α_t}
X_3	0	0	0	0	0	0	$-X_\alpha$
X_4	$-X_1$	$-2X_2$	0	0	X_5	$2X_6$	$X_{\alpha'}$
X_5	X_3	$-2X_1$	0	$-X_5$	0	0	$X_{\alpha''}$
X_6	$-2X_5$	$2X_3-4X_4$	0	$-2X_6$	0	0	$X_{\alpha'''}$
X_α	$-X_{\alpha_x}$	$-X_{\alpha_t}$	X_α	$-X_{\alpha'}$	$-X_{\alpha''}$	$-X_{\alpha'''}$	0

由于 ϵ 为常数, 可以容易看出 G_3 和 G_α 代表传热方程的线性特性, 所以加一个解或这个解乘一个常数都是方程的解。G_1 群和 G_2 群表示在时间和空间平移的不变性, 这个现象的本质是由于传热方程为常系数的方程, G_4 群代表拉伸对称性, G_5 代表一种运动坐标的 Galilean 变换 (2ε 为波速), G_α 是一个真正的局部变换群, 很难看出其对应的物理原理。不过, 这个变换对应的解为 $u^{(6)}$。如果解 $u=f(x,t)=c$ 是常数, 这样有

$$u^{(6)}=\frac{c}{\sqrt{1+4\epsilon t}}\exp\left(\frac{-\epsilon x^2}{1-4\epsilon t}\right) \tag{16.13}$$

如果取常数 $c=\sqrt{\epsilon/\pi}$, 就可以得到传热方程在 $(x_0,t_0)=(0,-1/4\epsilon)$ 的基本解 (这里需要用 G_2 作变换), 即得到非常有名的 Fourier 解

$$u^{(6)}=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right) \tag{16.14}$$

最一般的对称群情况是线性组合 $X=c_1X_1+\cdots+c_6X_6+X_\alpha$, 对应此群的显式表示非常复杂, 可以构造一个指数映射 (exponential map) g: $g\mapsto G$, 即

$$g=\exp(X_\alpha)\prod_{i=1}^{6}\exp(\epsilon_iX_i)=\exp(X_\alpha)\cdot\exp(\epsilon_1X_1)\cdot\cdots\cdot\exp(\epsilon_6X_6) \tag{16.15}$$

如果已知 $u=f(x,t)$ 是原方程的一个解, 在 g 群变换下, 可以得到最一般的解为

$$\begin{aligned}u=&\frac{1}{\sqrt{1+4\epsilon_6t}}\exp\left[\epsilon_3-\frac{\epsilon_5x+\epsilon_6x^2-\epsilon_5^2t}{1+4\epsilon_6t}\right]\times\\&f\left[\frac{\mathrm{e}^{-\epsilon_4}(x-2\epsilon_5t)}{1+4\epsilon_6t}-\epsilon_1,\ \frac{\mathrm{e}^{-2\epsilon_4}t}{1+4\epsilon_6t}-\epsilon_2\right]+\alpha(x,t)\end{aligned} \tag{16.16}$$

16.2 平板大挠度的 von Kármán 方程

薄板弯曲变形的大挠度振动问题由 von Kármán 方程描述, 可以通过无量纲

化转换为如下形式[99]:

$$
\begin{aligned}
&\nabla^4 F = (w_{xy})^2 - w_{xx}w_{yy} \\
&\nabla^4 w = -w_{tt} + F_{yy}w_{xx} + F_{xx}w_{yy} - 2F_{xy}w_{xy}
\end{aligned}
\tag{16.17}
$$

其中, 双调和算子 $\nabla^4 = \partial_x^4 + 2\partial_x^2\partial_y^2 + \partial_y^4$, w 为挠度, F 为应力函数, 应力可表示为 $\sigma_x = F_{yy}, \sigma_y = F_{xx}, \tau_{xy} = -F_{xy}$。

经过分析可以得到无穷小生成元$X = \sum_{i=1}^{14} c_i X_i$, 其中 14 个分量

$$
\begin{gathered}
X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_x, \quad X_3 = \partial_y \\
X_4 = y\partial_x - x\partial_y, \quad X_5 = 2t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y \\
X_6 = \partial_w, \quad X_7 = t\partial_w, \quad X_8 = x\partial_w \\
X_9 = y\partial_w, \quad X_{10} = tx\partial_w, \quad X_{11} = ty\partial_w \\
X_{12} = \alpha(t)x\partial_F, \quad X_{13} = \beta(t)y\partial_F, \quad X_{14} = \gamma(t)\partial_F
\end{gathered}
\tag{16.18}
$$

其中, α, β, γ 为时间 t 的任意函数。X_{12}, X_{13}, X_{14} 对应无穷维子代数。对于任意一个无穷小生成元都可以求出相应的精确解。

对应于 X_5 的伸缩变换, 可以引入变换

$$
\lambda = \frac{x}{y} \tag{16.19}
$$

方程在这个变换下对称, $F = f(\lambda), w = h(\lambda)$, 这样 von Kármán 方程可以变换为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\lambda^3}\left[(1+\lambda^2+\lambda^4)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda}\right] = \left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 \\
&\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\lambda^3}\left[(1+\lambda^2+\lambda^4)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\lambda}\right] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\lambda\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\lambda}\right) - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\lambda}
\end{aligned}
\tag{16.20}
$$

对应于 X_4 的旋转群, 有不变变换

$$
\lambda = x^2 + y^2, \quad F = f(\lambda), \quad w = h(\lambda) \tag{16.21}
$$

这时, von Kármán 方程变为

$$
\begin{aligned}
&4\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2}\left(\lambda^2\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\lambda^2}\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left[\lambda\left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2\right] \\
&2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2}\left(\lambda^2\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}\lambda^2}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left[\lambda\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda}\right]
\end{aligned}
\tag{16.22}
$$

可以积分变为

$$
\begin{aligned}
&4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\lambda^2\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\lambda^2}\right) = -\lambda\left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + A \\
&2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\lambda^2\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}\lambda^2}\right) = \lambda\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda} + B
\end{aligned}
\tag{16.23}
$$

其中, A, B 为积分常数。

还可以再考虑其他情况的变换。虽然这些变换后的方程仍然是非线性的, 但已经极大的简化, 例如偏微分方程转换为常微分方程。只要继续使用 Lie 群方法就可以求解这些非线性常微分方程组, 这个工作留给读者。

16.3 二维平行剪切流的线性稳定 Orr-Sommerfeld 方程的 Lie 群对称性分析

流体运动从层流到湍流的转变过程一般都要先经历线性稳定和非线性稳定, 其中的线性稳定问题由 Orr-Sommerfeld 方程描述。Orr-Sommerfeld 方程是一个四阶变系数常微分方程, 其求解曾是一个力学难题, 通常利用摄动法近似求解, 最终由 S. A. Orzag 利用 Chebyshev 多项式求得较精确的解[100]。A. Nold 等[101] 研究了 Orr-Sommerfeld 方程的对称性。

设 x 方向的来流速度是 $U(y)$, y 方向的来流速度为 0, 在来流分别有小的扰动 u, v, 这样二维黏性流动 Navier-Stokes 方程变为

$$\begin{aligned} u_t + U(y)u_x + vU_y + (uu_x + vu_y) &= \frac{p_x}{\rho} + \nu(u_{xx} + u_{yy}) \\ v_t + U(y)v_x + (uu_x + vu_y) &= \frac{p_y}{\rho} + \nu(u_{xx} + u_{yy}) \\ u_x + v_y &= 0 \end{aligned} \tag{16.24}$$

引入流函数 (stream function) ψ, 显然, 式 (16.24) 的第三式自动满足, 前两个方程可以转换为有关流函数的偏微分方程, 省略有关 u, v 的二次项, 得到线性方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}\frac{\partial\psi}{\partial x} + U\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\psi = \nu\nabla^2\nabla^2\psi \tag{16.25}$$

其中, 拉普拉斯算子 $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$。式 (16.25) 的无穷小生成元可以确定如下:

$$\begin{gathered} X = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 + c_4X_4 \\ X_1 = a(x,y)\partial_\psi, \quad X_2 = \partial_x, \quad X_3 = \partial_t, \quad X_4 = \psi\partial_\psi \end{gathered} \tag{16.26}$$

其中, $a(x,y)$ 为任意函数。

16.4 无黏流体的 Euler 方程的 Lie 群对称性分析

三维无黏不可压流体的控制由 Euler 方程描述, 设时间 t 和空间 x, y, z 为自变量, 因变量是流体速度场矢量 $\boldsymbol{u} = (u, v, w)$ 和流体压强 p (密度取为 1), Euler

方程为[81]

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}&=-\nabla p\\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}&=0\end{aligned}\tag{16.27}$$

其分量形式为

$$\begin{aligned}u_t+uu_x+vu_y+wu_z&=-p_x\\ v_t+uv_x+vv_y+wv_z&=-p_y\\ w_t+uw_x+vw_y+ww_z&=-p_z\\ u_x+v_y+w_z&=0\end{aligned}\tag{16.28}$$

其中, $u_x=\partial_x(:), p_x=\partial_x(p)$。Euler 方程的无穷小生成元为

$$X=\xi\partial_x+\eta\partial_y+\zeta\partial_z+\tau\partial_t+\phi\partial_u+\psi\partial_v+\chi\partial_w+\pi\partial_p\tag{16.29}$$

相应的无穷小生成元的一次延拓

$$\begin{aligned}X^{(1)}=&X+\phi_t\partial_{u_t}+\psi_t\partial_{v_t}+\chi_t\partial_{w_t}+\pi_t\partial_{p_t}+\\ &\phi_x\partial_{u_x}+\psi_x\partial_{v_x}+\chi_x\partial_{w_x}+\pi_x\partial_{p_x}+\\ &\phi_y\partial_{u_y}+\psi_y\partial_{v_y}+\chi_y\partial_{w_y}+\pi_y\partial_{p_y}+\\ &\phi_z\partial_{u_z}+\psi_z\partial_{v_z}+\chi_z\partial_{w_z}+\pi_z\partial_{p_z}\\ =&\xi\partial_x+\eta\partial_y+\zeta\partial_z+\tau\partial_t+\phi\partial_u+\psi\partial_v+\chi\partial_w+\pi\partial_p+\\ &\phi_t\partial_{u_t}+\psi_t\partial_{v_t}+\chi_t\partial_{w_t}+\pi_t\partial_{p_t}+\\ &\phi_x\partial_{u_x}+\psi_x\partial_{v_x}+\chi_x\partial_{w_x}+\pi_x\partial_{p_x}+\\ &\phi_y\partial_{u_y}+\psi_y\partial_{v_y}+\chi_y\partial_{w_y}+\pi_y\partial_{p_y}+\\ &\phi_z\partial_{u_z}+\psi_z\partial_{v_z}+\chi_z\partial_{w_z}+\pi_z\partial_{p_z}\end{aligned}\tag{16.30}$$

将 $X^{(1)}$ 作用于 Euler 方程 [式 (16.28)], 得到问题的对称性决定方程

$$\phi_t+u\phi_x+v\phi_y+w\phi_z+u_x\phi+u_y\psi+u_z\chi=-\pi_x\tag{16.31}$$

$$\psi_t+u\psi_x+v\psi_y+w\psi_z+v_x\phi+v_y\psi+v_z\chi=-\pi_y\tag{16.32}$$

$$\chi_t+u\chi_x+v\chi_y+w\chi_z+w_x\phi+w_y\psi+w_z\chi=-\pi_z\tag{16.33}$$

$$\phi_x+\psi_y+\chi_z=0\tag{16.34}$$

如果引入特征函数

$$\begin{aligned}Q_u&=\phi-\xi u_x-\eta u_y-\zeta u_z-\tau u_t\\ Q_v&=\psi-\xi v_x-\eta v_y-\zeta v_z-\tau v_t\\ Q_w&=\chi-\xi w_x-\eta w_y-\zeta w_z-\tau w_t\\ Q_p&=\pi-\xi p_x-\eta p_y-\zeta p_z-\tau p_t\end{aligned}\tag{16.35}$$

其中的系数函数可写为

$$
\begin{aligned}
\phi_t &= D_t(Q_u) - \xi D_t u_x - \eta D_t u_y - \zeta D_t u_z - \tau D_t u_t \\
&= D_t\phi - u_x D_t\xi - u_y D_t\eta - u_z D_t\zeta - u_t D_t\tau \\
\psi_x &= D_x\psi - v_x D_x\xi - v_y D_x\eta - v_z D_x\zeta - v_t D_x\tau \\
\pi_z &= D_z(Q_p) - \xi D_t p_x - \eta D_t p_y - \zeta D_t p_z - \tau D_t p_t \\
&= D_t\pi - p_x D_t\xi - p_y D_t\eta - p_z D_t\zeta - p_t D_t\tau
\end{aligned}
\tag{16.36}
$$

其他系数可以通过变量替换得到。其中, D_x 为全导数算子

$$
D_x = \partial_x + u_x\partial_u + v_x\partial_v + w_x\partial_w + p_x\partial_p \tag{16.37}
$$

把 Euler 方程中的 p_x, p_y, p_z, w_z 代入式 (16.32) ~ 式 (16.34), 合并所有的有关 $p, \boldsymbol{u}$ 的一阶导数项, 求解决定方程确定 $\xi, \eta, \zeta, \tau, \phi, \psi, \chi, \pi$。由式 (16.31) 的 p_t 系数, 可以得到

$$
\phi_p - \xi_p u_x - \eta_p u_y - \zeta_p u_z - \tau_p u_t = D_x\tau = \tau_x + u_x\tau_u + v_x\tau_v + w_x\tau_w + p_x\tau_p \tag{16.38}
$$

所以有 $\tau_v = \tau_w = 0$, 再由式 (16.33) 得到 $\tau_u = 0$。进一步, 比较 p_x 的有关项, 有

$$
\phi_p = \tau_x, \quad \psi_p = \tau_y, \quad \chi_p = \tau_z \tag{16.39}
$$

$$
\xi_p = u\tau_p, \quad \eta_p = v\tau_p, \quad \zeta_p = w\tau_p \tag{16.40}
$$

下面考虑式 (16.32) 的二次项 $v_t v_x$, 可得 $\eta_v = 0$。同样, 对于 $v_t w_x$, 可得 $\eta_w = 0$。进一步分析可以发现, ξ, η, ζ 与 u, v, w 没有关系。将式 (16.40) 对 u, v, w 进行微分, 可得 $\tau_p = 0$, 因此, $\xi_p = \eta_p = \zeta_p = 0$。由以上分析可以看出, ξ, η, ζ, τ 仅仅依赖 x, t, 即

$$
\begin{aligned}
\xi &= \xi(x,t) \\
\eta &= \eta(x,t) \\
\zeta &= \zeta(x,t) \\
\tau &= \tau(x,t)
\end{aligned}
\tag{16.41}
$$

下面来考察式 (16.34) 中 u_t, v_t, w_t 的系数, 同时注意在 ∇p 中的相关项, 考虑到式 (16.39) 可得

$$
\begin{aligned}
\phi_p + \tau_x = \psi_p + \tau_y = \chi_p + \tau_z &= 0 \\
2\tau_x = 2\tau_y = 2\tau_z &= 0 \\
2\phi_p = 2\psi_p = 2\chi_p &= 0
\end{aligned}
\tag{16.42}
$$

说明 τ 与 x,y,z 无关, 只是 t 的函数, 即 $\tau=\tau(t)$, 以及 ϕ,ψ,χ 与压强 p 无关。

再考察式 (16.31) 中 v_t 的系数, 有

$$\phi_v=-\eta_x,\quad \phi_v=-\eta_x-\pi_v \tag{16.43}$$

所以 $\pi_v=0$。同样还可以得到 π 与 u,w 无关。由 u_t,w_t 的系数可得

$$\phi_u=\tau_t-\xi_x+\pi_p,\quad \phi_w=-\zeta_x \tag{16.44}$$

所有这些都表明 ϕ,ψ,χ 可以表示为一般形式

$$\begin{aligned}\phi&=(\tau_t-\xi_x+\pi_p)u-\eta_x v-\zeta_x w+\hat{\phi}(x,t)\\ \psi&=-\xi_y u+(\tau_t-\eta_y+\pi_p)v-\zeta_y w+\hat{\psi}(x,t)\\ \chi&=-\xi_z u-\eta_z v+(\tau_t-\zeta_z+\pi_p)w+\hat{\chi}(x,t)\end{aligned} \tag{16.45}$$

代入式 (16.31) ~ 式 (16.33), 得到有关空间导数的系数

$$\begin{gathered}\hat{\phi}=\xi_t,\quad \hat{\psi}=\eta_t,\quad \hat{\chi}=\zeta_t\\ \xi_x=\eta_y=\zeta_z=\tau_t+\frac{1}{2}\pi_p\\ \xi_y+\eta_x=\xi_z+\zeta_x=\eta_z+\zeta_y=0\end{gathered} \tag{16.46}$$

至此, 在式 (16.31) ~ 式 (16.34) 中有关 $p,\boldsymbol{u}$ 的导数就没有了。这样就要求 ξ,η,ζ 是 x,y,z 的线性函数, 同时

$$\begin{gathered}\xi_{yt}=\xi_{zt}=\eta_{xt}=\eta_{zt}=\zeta_{xt}=\zeta_{yt}=0\\ \xi_{xt}=\eta_{yt}=\zeta_{zt}=\tau_{tt}\\ \xi_{tt}=-\pi_x,\quad \eta_{tt}=\pi_y,\quad \zeta_{tt}=-\pi_z\end{gathered} \tag{16.47}$$

由此可积分得到

$$\begin{aligned}\xi&=\delta_t x+c_1 y-c_2 z+\alpha\\ \eta&=-c_1 x+\delta_t y+c_3 z+\beta\\ \zeta&=c_2 x-c_3 y+\delta_t z+\gamma\\ \tau&=2\delta+c_4 t+c_5\\ \phi&=-(\delta_t+c_4)u+c_1 v-c_2 w+\alpha_t\\ \psi&=-c_1 u-(\delta_t+c_4)v+c_3 w+\beta_t\\ \chi&=c_2 u-c_3 v-(\delta_t+c_4)w+\gamma_t\\ \pi&=-2(\delta_t+c_4)p-\frac{1}{2}\delta_{tt}(x^2+y^2+z^2)-(\alpha_{tt}x+\beta_{tt}y+\gamma_{tt}z)+\theta\end{aligned} \tag{16.48}$$

其中, c_i 为常数, $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\theta$ 是 t 的函数。再利用不可压条件方程 (16.34), 得到 $\delta_{tt}=0$, 积分后得 $\delta=c_6t+c_7$。

把 δ 代入上式, 整理后得

$$\begin{aligned}
\xi &= c_6x+c_1y-c_2z+\alpha\\
\eta &= -c_1x+c_6y+c_3z+\beta\\
\zeta &= c_2x-c_3y+c_6z+\gamma\\
\tau &= 2(c_6t+c_7)+c_4t+c_5\\
\phi &= -(c_6+c_4)u+c_1v-c_2w+\alpha_t\\
\psi &= -c_1u-(c_6+c_4)v+c_3w+\beta_t\\
\chi &= c_2u-c_3v-(c_6+c_4)w+\gamma_t\\
\pi &= -2(c_6+c_4)p-(\alpha_{tt}x+\beta_{tt}y+\gamma_{tt}z)+\theta
\end{aligned}\tag{16.49}$$

把上式代入无穷小生成元X, 有以下 10 个分量

$$\begin{aligned}
X_1 &= \alpha\partial_x+\alpha_t\partial_u-\alpha_{tt}x\partial_p\\
X_2 &= \beta\partial_y+\beta_t\partial_v-\beta_{tt}y\partial_p\\
X_3 &= \gamma\partial_z+\gamma_t\partial_w-\gamma_{tt}z\partial_p\\
X_4 &= \partial_t\\
X_5 &= x\partial_x+y\partial_y+z\partial_z+t\partial_t\\
X_6 &= t\partial_t-u\partial_u-v\partial_v-w\partial_w-2p\partial_p\\
X_7 &= y\partial_x-x\partial_y+v\partial_u-u\partial_v\\
X_8 &= x\partial_z-z\partial_x+u\partial_w-w\partial_u\\
X_9 &= z\partial_y-y\partial_z+w\partial_v-v\partial_w\\
X_{10} &= \theta\partial_p
\end{aligned}\tag{16.50}$$

以上分量对应的 Lie 群如下:

(1) 移动变换群 X_1,X_2,X_3:

$$G_\alpha:(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{u},p)\mapsto(\boldsymbol{x}+\epsilon\boldsymbol{\alpha}(t),t,\boldsymbol{u}+\epsilon\boldsymbol{\alpha}_t,p-\epsilon\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\alpha}_{tt}-\frac{1}{2}\epsilon^2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}_{tt})\tag{16.51}$$

其中, $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha,\beta,\gamma)$, G_α 由 $(X_1+X_2+X_3)$ 生成。

(2) 时间变换:

$$G_0:(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{u},p)\mapsto(\boldsymbol{x},t+\epsilon,\boldsymbol{u},p)\tag{16.52}$$

(3) 伸缩 (膨胀) 变换:

$$\begin{aligned}
G_1&:(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{u},p)\mapsto(\mathrm{e}^\epsilon\boldsymbol{x},\mathrm{e}^\epsilon t,\boldsymbol{u},p)\\
G_2&:(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{u},p)\mapsto(\boldsymbol{x},\mathrm{e}^\epsilon t,\mathrm{e}^{-\epsilon}\boldsymbol{u},\mathrm{e}^{-2\epsilon}p)
\end{aligned}\tag{16.53}$$

(4) 转动变换:

$$SO(3):(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{u},p)\mapsto(\boldsymbol{R}\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{R}\boldsymbol{u},p) \tag{16.54}$$

其中, $\boldsymbol{R}$ 为容易三维正交转动矩阵。

(5) 压力变换:

$$G_p:(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{u},p)\mapsto(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{u},p+\epsilon\theta) \tag{16.55}$$

对应于这些 Lie 群, 如果 Euler 方程有解 $\boldsymbol{u}=f(\boldsymbol{x},t)$ 和 $p=g(\boldsymbol{x},t)$, 那么下面的形式也是 Euler 方程的解[102]。

$$\begin{aligned}
G_\alpha:&\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}-\epsilon\boldsymbol{\alpha}(t),t]+\epsilon\boldsymbol{\alpha}\\
&\ p=g[\boldsymbol{x}-\epsilon\boldsymbol{\alpha}(t),t]-\epsilon\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\alpha}_{tt}+\frac{1}{2}\epsilon^2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}_{tt}\\
G_0:&\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t-\epsilon),\quad p=g(\boldsymbol{x},t-\epsilon)\\
G_1:&\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}(\mathrm{e}^\epsilon\boldsymbol{x},\mathrm{e}^\epsilon t),\quad p=g(\mathrm{e}^\epsilon\boldsymbol{x},\mathrm{e}^\epsilon t)\\
G_2:&\ \boldsymbol{u}=\mathrm{e}^\epsilon\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\mathrm{e}^\epsilon t),\quad p=\mathrm{e}^{2\epsilon}g(\boldsymbol{x},\mathrm{e}^\epsilon t)\\
SO(3):&\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{x},t),\quad p=g(\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{x},t)\\
G_p:&\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t),\quad p=g(\boldsymbol{x},t)+\epsilon\theta
\end{aligned} \tag{16.56}$$

最一般的对称群情况是可以构造一个指数映射 g: $g\mapsto G$, 即

$$g=\prod_{i=0}^{10}\exp(\epsilon_iX_i)=\exp(\epsilon_1X_1)\cdot\cdots\cdot\exp(\epsilon_{10}X_{10}) \tag{16.57}$$

已知的解 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t),p=g(\boldsymbol{x},t)$ 在 g 群变换下, 可以得到最一般的解为①

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{R}\mathrm{e}^{\epsilon_4}\boldsymbol{f}[\mathrm{e}^{\epsilon_3}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{x}-\epsilon_1\boldsymbol{\alpha}(\mathrm{e}^{\epsilon_3+\epsilon_4}t-\epsilon_2),\mathrm{e}^{\epsilon_3+\epsilon_4}t-\epsilon_2]+\epsilon_1\boldsymbol{\alpha} \tag{16.58}$$

$$\begin{aligned}
p=&\ \mathrm{e}^{2\epsilon_4}g[\boldsymbol{R}^{-1}\mathrm{e}^{\epsilon_3}\boldsymbol{x}-\epsilon_1\boldsymbol{\alpha}(\mathrm{e}^{\epsilon_3+\epsilon_4}t-\epsilon_2),\mathrm{e}^{\epsilon_3+\epsilon_4}t-\epsilon_2]-\\
&\ \epsilon_1\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\alpha}_{tt}+\frac{1}{2}\epsilon_1^2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}_{tt}+\epsilon_6\theta
\end{aligned} \tag{16.59}$$

16.5 黏性流体的 Navier-Stokes 方程的 Lie 群对称性分析

三维黏性不可压流体的控制由 Navier-Stokes 方程描述, 设时间 t 和空间 x,y,z 为自变量, 因变量是流体速度场矢量 $\boldsymbol{u}=(u,v,w)$ 和流体压强 p (密度取为 1), Navier-Stokes 方程为

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{\nabla}p+\nu\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{u}\\
&\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}=0
\end{aligned} \tag{16.60}$$

① 说明: 这里的一般解由本书第一次具体写出。

其分量形式为

$$
\begin{aligned}
u_t + uu_x + vu_y + wu_z &= -p_x + \nu\nabla^2 u \\
v_t + uv_x + vv_y + wv_z &= -p_y + \nu\nabla^2 v \\
w_t + uw_x + vw_y + ww_z &= -p_z + \nu\nabla^2 w \\
u_x + v_y + w_z &= 0
\end{aligned}
\tag{16.61}
$$

其中, ν 为黏性系数。

Lloyd[103] 证明 Navier-Stokes 方程的无穷小生成元与以上已经讨论过的无黏流体的 Euler 方程的生成元是一样的。即如果已知 Navier-Stokes 方程的一个解 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t), p = g(\boldsymbol{x}, t)$, 在 g 群变换下, 可以得到其最一般的解为①

$$
\boldsymbol{u} = \boldsymbol{R}\mathrm{e}^{\epsilon_4}\boldsymbol{f}[\mathrm{e}^{\epsilon_3}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{x} - \epsilon_1\boldsymbol{\alpha}(\mathrm{e}^{\epsilon_3+\epsilon_4}t - \epsilon_2), \mathrm{e}^{\epsilon_3+\epsilon_4}t - \epsilon_2] + \epsilon_1\boldsymbol{\alpha} \tag{16.62}
$$

$$
\begin{aligned}
p = {} & \mathrm{e}^{2\epsilon_4} g[\boldsymbol{R}^{-1}\mathrm{e}^{\epsilon_3}\boldsymbol{x} - \epsilon_1\boldsymbol{\alpha}(\mathrm{e}^{\epsilon_3+\epsilon_4}t - \epsilon_2), \mathrm{e}^{\epsilon_3+\epsilon_4}t - \epsilon_2] - \\
& \epsilon_1\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\alpha}_{tt} + \frac{1}{2}\epsilon_1^2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}_{tt} + \epsilon_6\theta
\end{aligned}
\tag{16.63}
$$

16.6 一般非线性 Burgers 方程的精确解

一般非线性Burgers 方程出现在流体、聚集态物理等现象中, 是一个较重要的非线性方程。李继彬团队[93] 对 Lie 群进行了长期系统的研究, 参考文献 [104] 使用 Lie 群方法并结合级数解细致地研究了一般非线性Burgers 方程

$$
u_t = a(u_x)^2 + bu_{xx} \tag{16.64}
$$

其中, $u = u(x, t)$ 是未知实函数, 参数 $a, b \in R$, 并且 $ab \neq 0$。

这里的内容主要取自参考文献 [104], 但我们对变换群 G_4 和 G_6 相应的解进行了修改。具体地讲, 对于 G_4 群的解, 明确地把他们的一个积分解表示为对数和 erf (误差函数) 的形式, 对于 G_6 群的解, 参考文献 [104] 指出方程不存在用初等函数表示的解, 所以用了很长的篇幅介绍一种级数解。孙博华[105] 给出 G_6 群的初等函数解, 具体就是用对数函数表示 G_6 群的解, 同时还给出了包括所有 Lie 群的最一般的通解。从而完善了一般非线性 Burgers 方程的精确解。

16.6.1 Lie 群对称无穷小生成元

首先, 对 x, t, u 作无穷小变换

$$
\begin{aligned}
x &\mapsto x + \epsilon\xi(x, t, u) \\
t &\mapsto t + \epsilon\tau(x, t, u) \\
u &\mapsto u + \epsilon\phi(x, t, u)
\end{aligned}
\tag{16.65}
$$

① 说明: 这里的一般解由本书第一次具体写出。

相应的无穷小生成元 X 可以表示为

$$X = \xi\partial_x + \tau\partial_t + \phi\partial_u \tag{16.66}$$

以及 X 的二次延拓 $X^{(2)}$ 可以表示为

$$X^{(2)} = X + \phi^t\partial_{u_t} + \phi^x\partial_{u_x} + \phi^{xx}\partial_{u_{xx}} \tag{16.67}$$

其中, 系数函数

$$\begin{aligned}
\phi^t &= D_t\phi - u_xD_t\xi - u_tD_t\tau \\
\phi^x &= D_x\phi - u_xD_x\xi - u_tD_x\tau \\
\phi^{xx} &= D_x^2\phi - u_xD_x^2\xi - u_tD_t^2\tau - 2u_{xx}D_x\xi - 2u_{xt}D_x\tau
\end{aligned} \tag{16.68}$$

其中, D_x, D_t 分别是对于 x, t 的全导数

$$\begin{aligned}
D_x &= \partial_x + u_x\partial_u + u_{xx}\partial_{u_x} + u_{xt}\partial_{u_t} \\
D_t &= \partial_t + u_t\partial_u + u_{xt}\partial_{u_x} + u_{tt}\partial_{u_t}
\end{aligned} \tag{16.69}$$

式 (16.64) 的 Lie 群对称性决定方程就为

$$X^{(2)}(u_t - au_x^2 - bu_{xx}) = 0 \tag{16.70}$$

即

$$\phi^t - 2au_x\phi^x - b\phi^{xx} = 0 \tag{16.71}$$

把有关表达式代入对称性决定方程 [式 (16.70)], 注意把 u_t 用 $au_x^2 + bu_{xx}$ 代替, 并比较可以得到无穷小生成元的系数函数 (也可以使用 Maple 获得)

$$\begin{aligned}
\xi &= 4ac_1xt + c_2x + 2ac_4t + c_5 \\
\tau &= 4ac_1t^2 + 2c_2t + c_3 \\
\phi &= a\mathrm{e}^{-\frac{au}{b}} - c_1x^2 - c_4x - 2b_1t + c_6
\end{aligned} \tag{16.72}$$

其中, $c_i(i = 1, 2, \cdots, 6)$ 为任意常数。$\alpha = \alpha(x, t)$ 为满足下列传导方程的函数

$$\alpha_t = b\alpha_{xx} \tag{16.73}$$

这样就有问题的无穷小生成元

$$X = \sum_{i=1}^{6} c_iX_i + V_\alpha \tag{16.74}$$

其中, 向量基为

$$
\begin{gathered}
X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_t,\quad X_3=\partial_u \\
X_4=x\partial_x+2t\partial_t,\quad X_5=2at\partial_x-x\partial_u \\
X_6=4axt\partial_x+4at^2\partial_t-(x^2+2bt)\partial_u \\
X_\alpha=\alpha(x,t)\mathrm{e}^{-\frac{au}{b}}\partial_u
\end{gathered}
\tag{16.75}
$$

其中, X_α 为无限维子代数。

16.6.2 Lie 代数和 Lie 群

现在验证 X_i 是否满足 Lie 代数的封闭性, 即如果 X_i 和 $X_j\in\mathcal{L}$, 那么 $[X_i,X_j]\in\mathcal{L}$。向量场的交换子 $[X_i,X_j]$ 结构系数如表 16.3 所示。其中, $\alpha'=x\alpha_x+2t\alpha_t,\alpha''=2at\alpha_x+(a/b)x\alpha,\alpha'''=4atx\alpha_x+4at^2\alpha_t+(a/b)(x^2+2bt)\alpha$。

表 16.3 Burgers 方程 Lie 代数结构系数表

$[X_i,X_j]$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_α
X_1	0	0	0	$-X_1$	X_3	$-2X_5$	$-X_{\alpha_x}$
X_2	0	0	0	$-2X_2$	$-2aX_1$	$2bX_3-4aX_4$	$-X_{\alpha_t}$
X_3	0	0	0	0	0	0	$\frac{a}{b}X_\alpha$
X_4	X_1	$2X_2$	0	0	$-X_5$	$-2X_6$	$-X_{\alpha'}$
X_5	$-X_3$	$2aX_1$	0	X_5	0	0	$-X_{\alpha''}$
X_6	$2X_5$	$-2bX_3+4aX_4$	0	$2X_6$	0	0	$-X_{\alpha'''}$
X_α	X_{α_x}	X_{α_t}	$-\frac{a}{b}X_\alpha$	$X_{\alpha'}$	$X_{\alpha''}$	$X_{\alpha'''}$	0

由 X_i 生成的 Lie 群 G_i 可以利用以前得到的变换关系 $\mathrm{e}^{\epsilon X_i}(x,t,u)=(\hat{x},\hat{t},\hat{u})$, 例如, 对于 G_1 计算 $\hat{x}$

$$
\hat{x}=\mathrm{e}^{\epsilon X_1}x=\mathrm{e}^{\epsilon\frac{\partial}{\partial x}}x=\left[1+\epsilon\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\epsilon^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+\cdots\right]x=x+\epsilon\frac{\partial x}{\partial x}=x+\epsilon \tag{16.76}
$$

对于 G_3 计算 $\hat{u}$

$$
\hat{u}=\mathrm{e}^{\epsilon X_3}u=\mathrm{e}^{\epsilon\frac{\partial}{\partial u}}u=\left[1+\epsilon\frac{\partial}{\partial u}+\frac{1}{2}\epsilon^2\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^2+\cdots\right]u=u+\epsilon\frac{\partial u}{\partial u}=u+\epsilon \tag{16.77}
$$

其他情况也可以同样计算。所有的 Lie 群如下:

$$
\begin{aligned}
&G_1:(x,t,u)\mapsto(x+\epsilon,t,u)\\
&G_2:(x,t,u)\mapsto(x,t+\epsilon,u)\\
&G_3:(x,t,u)\mapsto(x,t,u+\epsilon)\\
&G_4:(x,t,u)\mapsto(\mathrm{e}^{\epsilon}x,\mathrm{e}^{2\epsilon}t,u)\\
&G_5:(x,t,u)\mapsto(x+2\epsilon at,t,u-\epsilon x-\epsilon^2 t)\\
&G_6:(x,t,u)\mapsto\left(\frac{x}{1-4\epsilon at},\frac{t}{1-4\epsilon at},u-\frac{\epsilon x^2}{1-4\epsilon at}+\frac{b}{a}\ln\sqrt{1-4\epsilon at}\right)\\
&G_\alpha:(x,t,u)\mapsto\left(x,t,\frac{b}{a}\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{au}{b}}+\epsilon\frac{a}{b}\alpha\right)\right)
\end{aligned}
\tag{16.78}
$$

通过观察可以看出, G_1 群是空间的平移, G_2 群是时间的平移, G_3 群是因变量的平移, G_4 群是拉伸变换, G_5 群是伽利略 (速度) 变换, G_6 群是一个真正的局部变换群, 其物理意义不明确但非常重要, 它可以用来导出问题的相似解。

16.6.3 精确解和通解

利用 Lie 群对称就可以构造精确解。因为 G_i 是对称群, 如果 $u=f(x,t)$ 是式 (16.64) 的一个解, 那么对应 G_i 的解 $u^{(i)}$ 可以表达为

$$
\begin{aligned}
&u^{(1)}=f(x-\epsilon,t)\\
&u^{(2)}=f(x,t-\epsilon)\\
&u^{(3)}=f(x,t)+\epsilon\\
&u^{(4)}=f(\mathrm{e}^{-\epsilon}x,\mathrm{e}^{-2\epsilon}t)\\
&u^{(5)}=f(x-2\epsilon at,t)-\epsilon x+\epsilon^2 at\\
&u^{(6)}=f\left(\frac{x}{1+4\epsilon t},\frac{t}{1+4\epsilon at}\right)-\frac{\epsilon x^2}{1+4\epsilon at}-\frac{b}{a}\ln\sqrt{1+4\epsilon at}\\
&u^{(\alpha)}=\frac{b}{a}\ln\left[\mathrm{e}^{\frac{af(x,t)}{b}}+\epsilon\frac{a}{b}\alpha(x,t)\right]
\end{aligned}
\tag{16.79}
$$

最一般的对称群情况是线性组合 $X=c_1X_1+\cdots+c_6X_6+X_\alpha$, 对应此群的显式表示非常复杂, 可以构造一个指数映射 $g:g\mapsto G$, 即

$$
g=\exp(X_\alpha)\prod_{i=1}^{6}\exp(\epsilon_iX_i)=\exp(X_\alpha)\cdot\exp(\epsilon_1X_1)\cdot\cdots\cdot\exp(\epsilon_6X_6)
\tag{16.80}
$$

如果已知 $u=f(x,t)$ 是式 (16.64) 的一个解, 在 g 群变换下, 可以得到最一般的

解为①

$$u = f\left(\mathrm{e}^{-\epsilon_4}\frac{x-2\epsilon_5 at}{1+4\epsilon_6 at}-\epsilon_1,\ \frac{t\epsilon^{-2\epsilon_4}}{1+4\epsilon_6 at}-\epsilon_2\right)\epsilon_3-\epsilon_5\frac{x-\epsilon_5 at}{1+4\epsilon_6 at}-\frac{\epsilon_6 x^2}{1+4\epsilon_6 at}-\frac{b}{a}\ln\sqrt{1+4\epsilon_6 at}+\frac{b}{a}\ln\left[\mathrm{e}^{\frac{a}{b}f(x,t)}+\epsilon_6\frac{a}{b}\alpha(x,t)\right] \tag{16.81}$$

16.6.4 精确相似解

由无穷小生成元 X_i 就可以确定相应的不变量, 利用不变量简化式 (16.64) 求其解。

注意 X_1 和 X_2 组合产生一个移动波解。设新变量 $\mu = x - ct$, 这样 $u = u(x,t) = f(\mu)$, 其中, c 为波速。这样, 式 (16.64) 变为

$$bf'' + af'^2 + cf' = 0 \tag{16.82}$$

其中, $f' = \mathrm{d}f/\mathrm{d}\mu$。这个方程的解可以由积分得到

$$u(x,t) = \frac{b}{a}\ln\left[c_1\mathrm{e}^{\frac{c}{b}(x-ct)} - \frac{a}{c}\right] - \frac{c}{a}(x-ct) + c_2 \tag{16.83}$$

其中, c_1, c_2 为积分常数。

对于 G_3 群, 显然, 如果 $u = f(x,t)$ 是式 (16.64) 的一个解, 那么 $u = f(x,t)+c$ 也是式 (16.64) 的一个解。

对于 G_4 的拉伸群, 可以导出相似变量

$$\theta = xt^{-\frac{1}{2}}, \quad \omega = u \tag{16.84}$$

Lie 群相似解是 $\omega = f(\theta) = f(xt^{-1/2})$, 即

$$u = f\left(xt^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{16.85}$$

把该式代入式 (16.64), 可以简化为常微分方程

$$bf'' + af'^2 + \frac{1}{2}\theta f' = 0 \tag{16.86}$$

其中, $f' = \mathrm{d}f/\mathrm{d}\theta$。需要说明的是, 参考文献 [104] 中只写出了其积分表达式

$$f(\theta) = \int\frac{\exp\left(\dfrac{-\theta^2}{4b}\right)}{\int\exp\left(\dfrac{-\theta^2}{4b}\right)\mathrm{d}\theta + c_1}\mathrm{d}\theta + c_2 \tag{16.87}$$

① 说明: 这里的一般解由本书第一次具体写出。

但没有具体完成这个积分。式 (16.86) 的解由孙博华[105] 给出, 它可以用误差函数表示为

$$f(\theta)=\frac{b}{a}\ln\left\{\frac{a}{b}\left[c_1\sqrt{\pi}\sqrt{b}\cdot\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\frac{\theta}{\sqrt{b}}\right)+c_2\right]\right\} \tag{16.88}$$

其中, $\operatorname{erf}(\theta)=(2/\pi)\int_0^{\theta}\mathrm{e}^{-\theta^2}\mathrm{d}\theta$ 是误差函数。

对于 G_5 群, 有相似变量

$$\theta=t,\quad \omega=\frac{1}{2}x^2+2atu \tag{16.89}$$

因此, Lie 群相似解就是 $\omega=f(\theta)$, 即

$$u=\frac{1}{2at}f(t)-\frac{1}{4at}x^2 \tag{16.90}$$

把该式代入式 (16.64) 得到常微分方程

$$tf'-f+bt=0 \tag{16.91}$$

其中, $f'=\mathrm{d}f/\mathrm{d}\theta$。可以积分得其解

$$u(x,t)=\frac{c_1}{2a}-\frac{b}{2a}\ln t-\frac{1}{4at}x^2 \tag{16.92}$$

对于 G_6 群, 可以得到第一组相似变量

$$\theta=xt^{-1},\quad \omega=u+\frac{x^2}{4at}+\frac{b}{2a}\ln t \tag{16.93}$$

这样 Lie 群相似解为

$$u=f(xt^{-1})-\frac{x^2}{4at}-\frac{b}{2a}\ln t \tag{16.94}$$

将该式代入式 (16.64), 可以得到常微分方程

$$bf''+af'^2=0 \tag{16.95}$$

积分后得

$$\omega=\frac{b}{a}\ln\left|\frac{a}{b}\theta+c_1\right|+c_2 \tag{16.96}$$

因此, 对于 G_6 的这种情况, 有解

$$u(x,t)=\frac{b}{a}\ln\left|\frac{a}{b}xt^{-1}+c_1\right|-\frac{x^2}{4at}-\frac{b}{2a}\ln t+c_2 \tag{16.97}$$

对于 G_6 还有另一组相似变量, 把式 (16.93) 中的 $\ln t$ 变为 $\ln x$, 第二组相似变量为

$$\theta=xt^{-1},\quad \omega=u+\frac{x^2}{4at}+\frac{b}{2a}\ln x \tag{16.98}$$

这时 Lie 群相似解为

$$u = f(xt^{-1}) - \frac{x^2}{4at} - \frac{b}{2a}\ln x \tag{16.99}$$

把式 (16.99) 代入式 (16.64), 得到关于函数 $f(\theta)$ 的方程

$$4ab\theta^2 f'' + 4a^2\theta^2 f'^2 - 4ab\theta f' + 3b^2 = 0 \tag{16.100}$$

其中, $f' = \mathrm{d}f/\mathrm{d}\theta$。参考文献 [104] 指出, 式 (16.100) 一般得不到用初等函数表示的显式精确解, 所以它们提出了一个很有创意的级数解。

实际上, 这个方程有如下的精确解:

$$f(\theta) = \frac{b}{2a}\ln\left[\left(\frac{a}{b}\right)^2\theta(c_1\theta - c_2)^2\right] \tag{16.101}$$

所以, 有第二种形式的精确解

$$u(x,t) = \frac{b}{2a}\ln\left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 xt^{-1}(c_1xt^{-1} - c_2)^2\right] - \frac{x^2}{4at} - \frac{b}{2a}\ln x \tag{16.102}$$

式 (16.101) 的精确解 [式 (16.102)] 由孙博华[105]得到。

16.7 反应扩散方程的 Lie 群对称性分析和求解

参考文献 [106] 对 Lie 群对称性, 特别是利用 Ibragimov 守恒律求解非线性反应扩散方程进行了系统研究。他们曾研究过的方程有 $E = u_t - du_{xx} - b(x)u + u^u = 0, E = u_t + k(x)u^2u_x - du_{xx} - au + bu^4 = 0$ 和

$$E = u_t - du_{xx} - b(x)u^2 + u^3 = 0 \tag{16.103}$$

其中, $u(x,t)$ 代表人口密度, d 是一个常数, 代表扩散率, $b(x)$ 代表人的成长率。作为 Ibragimov 守恒律的应用实例, 这里介绍他们有关式 (16.103) 的研究结果。

16.7.1 式 (16.103) 的 Lie 群对称性分析

对式 (16.103) 使用无穷小变换

$$\begin{aligned} x &\mapsto x + \epsilon\xi(x,t,u) \\ t &\mapsto t + \epsilon\tau(x,t,u) \\ u &\mapsto u + \epsilon\phi(x,t,u) \end{aligned} \tag{16.104}$$

对应的无穷小生成元为

$$X = \xi(x,t,u)\partial_x + \tau(x,t,u)\partial_t + \phi(x,t,u)\partial_u \tag{16.105}$$

其二次延拓为

$$X^{(2)}V = V + \phi^x \partial_{u_x} + \phi^t \partial_{u_t} + \phi^{xx} \partial_{u_{xx}} + \phi^{xt} \partial_{u_{xt}} + \phi^{tt} \partial_{u_{tt}} \tag{16.106}$$

对于 $\xi(x,t,u), \tau(x,t,u)$ 和 $\phi(x,t,u)$, 必须满足对称性条件

$$\phi^t - d\phi^{xx} - b'(x)u^2\xi(x,t,u) - 2b(x)u\phi(x,t,u) + 3u^2\phi(x,t,u) = 0 \tag{16.107}$$

其中, ϕ^t, ϕ^{xx} 是 $X^{(2)}V$ 的系数

$$\phi^t = D_t\phi(x,t,u) - u_x D_t\xi(x,t,u) - u_t D_t\tau(x,t,u) \tag{16.108}$$

$$\begin{aligned}\phi^{xx} = {} & D_x^2\phi(x,t,u) - u_x D_x^2\xi(x,t,u) - u_t D_x^2\tau(x,t,u) - \\ & 2u_{xx}D_x\xi(x,t,u) - 2u_{xt}D_x\tau(x,t,u)\end{aligned} \tag{16.109}$$

D_x, D_t 分别是对于 x 和 t 的全导数。把 ϕ^t, ϕ^{xx} 代入对称性条件式 (16.107), 并用 $du_{xx} + b(x)u^2 - u^3$ 取代 u_t, 再比较 u 的一次导数和二次导数的系数, 得到对称性决定方程

$$\begin{aligned}\xi_u &= 0 \\ \tau_u &= 0 \\ \phi_{uu} &= 0 \\ \tau_x &= 0 \\ -d\tau_t + 2d\xi_x &= 0 \\ -\xi_t - 2d\phi_{xu} + d\xi_{xx} &= 0 \\ [-2ub(x)+3u^2]\phi - u^2\xi b'(x) + [-u^3+u^2b(x)]\phi_u + \phi_t + [u^3-u^2b(x)]\tau_t - d\phi_{xx} &= 0\end{aligned} \tag{16.110}$$

可以得到决定方程的一般解

$$\begin{aligned}\tau(x,t,u) &= c_1 t + c_2 \\ \xi(x,t,u) &= \frac{1}{2}c_1 x + c_3 \\ \phi(x,t,u) &= -\frac{1}{2}c_1 u\end{aligned} \tag{16.111}$$

其中, $b(x)$ 需要满足

$$\left(\frac{1}{2}c_1 x + c_3\right) b'(x) + \frac{1}{2}c_1 b(x) = 0 \tag{16.112}$$

情况 1: 当 $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = 0$ 时, 有无穷小生成元

$$X_1 = \partial_t \tag{16.113}$$

情况 2: 当 $c_1 = c_3 = 0$, $c_2 = 1$ 时, $b(x) = c_4/x$, 式 (16.103) 变为

$$u_t - du_{xx} - \frac{c_4}{x}u^2 + u^3 = 0 \tag{16.114}$$

无穷小生成元

$$X_2 = \frac{1}{2}x\partial_x + t\partial_t - \frac{1}{2}u\partial_u \tag{16.115}$$

情况 2 的 Lie 代数结构系数如表 16.4 所示。

表 16.4 情况 2 的 Lie 代数结构系数表

$[X_i, X_j]$	X_1	X_2
X_1	0	X_1
X_2	$-X_1$	0

情况 3: 当 $c_3 = 1, c_1 = c_2 = 0$ 时, 有 $b'(x) = 0$, 即 $b(x) = b$ 是常数。这时有

$$u_t - du_{xx} - bu^2 + u^3 = 0 \tag{16.116}$$

有相应的无穷小生成元

$$X_3 = \partial_x \tag{16.117}$$

情况 3 的 Lie 代数结构系数如表 16.5 所示。

表 16.5 情况 3 的 Lie 代数结构系数表

$[X_i, X_j]$	X_1	X_3
X_1	0	0
X_3	0	0

16.7.2 守恒律

参考文献 [106] 证明了式 (16.103) 没有 Noether 守恒律。因此, 采用 Ibragimov 守恒律研究了式 (16.103), 这样就得到该方程对应的 Euler 方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\delta \mathcal{L}}{\delta v} = u_t - du_{xx} - b(x)u^2 + u^3 = 0 \\ \dfrac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} = -2uvb(x) + 3vu^2 - v_t - dv_{xx} = 0 \end{cases} \tag{16.118}$$

其中, $\mathcal{L} = v[u_t - du_{xx} - b(x)u^2 + u^3]$, v 为中间变量, 没有物理意义。

根据 Ibragimov 守恒律, 守恒量 (C^1, C^2) 满足守恒方程

$$D_tC^1 + D_xC^2 = 0 \tag{16.119}$$

对应情况 1 的 X_1 生成的守恒律。这时由特征函数 $w=-u_t$, 有守恒量

$$C^1=v[-du_{xx}-b(x)u^2+u^3] \tag{16.120}$$

$$C^2=-du_tv_x+dvu_{tx} \tag{16.121}$$

由于包含中间变量 v, 因此有无穷多的守恒律如下:

$$D_tC^1+D_xC^2=u_t[-dv_{xx}-v_t-2ub(x)v+3u^2v] \tag{16.122}$$

对应情况 2 的 X_2 生成的守恒律。这时由特征函数 $w=-(1/2)u-(1/2)xu_x-tu_t$, 有守恒量

$$C^1=v\left(tu^3-t\frac{c_4}{x}u^2-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}xu_x-tdu_{xx}\right) \tag{16.123}$$

$$C^2=\frac{1}{2}xv\left(u_t-\frac{c_4}{x}u^2+u^3\right)-dv_x\left(\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}xu_x+tu_t\right)+ dv(u_x+tu_{tx}) \tag{16.124}$$

同样, 由于包含中间变量 v, 因此有无穷多的守恒律如下:

$$D_tC^1+D_xC^2=\left(\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}xu_x+tu_t\right)\left(-dv_{xx}-v_t-2u\frac{c_4}{x}v+3u^2v\right)+ \frac{1}{2}xv_x\left(u_t-du_{xx}-\frac{c_4}{x}u^2+u^3\right) \tag{16.125}$$

对应情况 3 的 X_3 生成的守恒律。这时由特征函数 $w=-u_x$, 有守恒量

$$C^1=-u_xv \tag{16.126}$$

$$C^2=v(u_t-bu^2+u^3)-du_xv_x \tag{16.127}$$

同样, 由于包含中间变量 v, 所以有无穷多的守恒律如下:

$$D_tC^1+D_xC^2=u_x(-dv_{xx}-v_t-2ubv+3u^2v) \tag{16.128}$$

16.7.3 精确解

这里给出两个方程的精确解, 一个是式 (16.114)

$$u_t-du_{xx}-\frac{c_4}{x}u^2+u^3=0$$

另一个是式 (16.116)

$$u_t-du_{xx}-bu^2+u^3=0$$

16.7.3.1 式 (16.114) 的相似变量解

这个方程的相似变量为

$$y = t^{-\frac{1}{2}}x, \quad \psi = t^{\frac{1}{2}}u \tag{16.129}$$

有关系

$$u = t^{-\frac{1}{2}}\psi \tag{16.130}$$

和

$$\begin{aligned} u_x &= t^{-1}\psi_y \\ u_{xx} &= t^{-\frac{3}{2}}\psi_{yy} \\ u_t &= -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}(\psi + y\psi_y) \end{aligned} \tag{16.131}$$

把以上关系式代入式 (16.114) 得到新变量的方程

$$t^{-\frac{3}{2}}\left[-\frac{1}{2}(\psi + y\psi_y)\right] = t^{-\frac{3}{2}}(d\psi_{yy} + c_1 y\psi^2 - \psi^3) \tag{16.132}$$

由于 t 的任意性, 可简化为

$$d\psi_{yy} + \frac{1}{2}y\psi_y + \frac{1}{2}v + c_1 y\psi^2 - \psi^3 = 0 \tag{16.133}$$

参考文献 [106] 中说明了式 (16.133) 没有解, 即式 (16.114) 没有解。

16.7.3.2 式 (16.116) 的精确解

由于式 (16.116) 的无穷小生成元是 $X_3 = \partial_x$, 所以这两个群可以组合成波动变换, 两个相似变量分别为

$$y = x - ct, \quad \psi = u \tag{16.134}$$

有关系

$$u_t = -c\psi_y, \quad u_x = \psi_y, \quad u_{xx} = \psi_{yy} \tag{16.135}$$

把以上关系式代入式 (16.116), 可以得到行波方程

$$d\psi_{yy} + c\psi_y + b\psi^2 - \psi^3 = 0 \tag{16.136}$$

这是一个常系数的非线性方程。当 $c = b\sqrt{2d}$ 时, 有解

$$\psi(y) = \frac{-b\sqrt{2d}}{-by + c_5 b\sqrt{2d}} \tag{16.137}$$

c_5 是积分常数。带回原变量, 得到式 (16.116) 的精确解

$$u(x,t) = \frac{-b\sqrt{2d}}{-b(x - b\sqrt{2d}t) + c_5 b\sqrt{2d}} \tag{16.138}$$

16.8 弹性力学的 Noether 守恒律

弹性力学中泛函变分方法是一个基本工具, 也是有限元的理论基础。以前的有关弹性力学对称性的研究都没有考虑部分边界条件的情况, 即边界条件不是物体的全表面情况。这一节将通过阶梯函数 Heaviside 函数来推广前人的结果, 这里的结果曾报告过[107,108]。

16.8.1 弹性力学势能的 Noether 守恒律

以位移 u_i 为变量的弹性势能 W 可写为

$$W = \iiint [A(E_{ij}) - f_i u_i]\mathrm{d}^3x - \iint_{S_p} \bar{p}_i u_i \mathrm{d}^2x, \quad \delta W = 0 \tag{16.139}$$

其中, u_i 为位移, p_i 为已知面力, f_i 为已知体力, $A(E_{ij})$ 为单位弹性变形能, E_{ij} 是 Green 应变张量分量。应力张量分量 $\sigma_{ij} = \partial A/\partial E_{ij}, S_p$ 为面力已知的表面 (一般不是封闭的全表面)。

面积分的问题主要是 S_p 不一定是全表面, 所以一般不能把面积分转化为体积分。

如果是全表面, 可以把表面力转化为应力 $\bar{p}_i = \bar{\sigma}_{ij} n_j$, 那么

$$\begin{aligned}\iint_{S_p} \bar{p}_i u_i \mathrm{d}^2x &= \iint_{S_p} \bar{\sigma}_{ij} n_j u_i \mathrm{d}^2x \\ &= \iiint (u_i \bar{\sigma}_{ij})_{,j} \mathrm{d}^3x \\ &= \iiint (\bar{\sigma}_{ij,j} u_i + \bar{\sigma}_{ij} u_{i,j}) \mathrm{d}^3x\end{aligned} \tag{16.140}$$

微小变化

$$W^* = \iiint [A(E^*_{ij}) - f_i u^*_i]\mathrm{d}^3x^* - \iint_{S_p} \bar{p}_i u^*_i \mathrm{d}^2x^* \tag{16.141}$$

Lie 群对称性要求

$$W^* = W \tag{16.142}$$

对称性可以写为

$$\begin{aligned}&X^{(1)}A - \bar{\sigma}_{ij} X^{(1)} u_{i,j} - f_i X u_i - \bar{\sigma}_{ij,j} u_i - \\ &(A - f_i u_i - \bar{\sigma}_{ij,j} u_i - \bar{\sigma}_{ij} u_{i,j}) D(\xi + \eta + \zeta) = 0\end{aligned} \tag{16.143}$$

其中, u_i 的无穷小生成元 $X = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \zeta\partial_z$, $X^{(1)}$ 为一次延拓, D 为全导数。

如果不考虑边界条件, 将式 (6.143) 简化为 Noether 守恒律, 即

$$X^{(1)}A - f_i X u_i - (A - f_i u_i) D(\xi + \eta + \zeta) = 0 \tag{16.144}$$

如果边界条件不是在全表面, 而是作用在部分表面, 这时就不能把面积分直接转化为体积分。需要引入 Heaviside 函数

$$H(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases} \tag{16.145}$$

Heavside 函数的导数是 $\mathrm{d}H(x)/\mathrm{d}x=\delta(x)$。

假如边界条件在一个小面积 S_p 内 $p_i=\bar{p}_i$, 在 S_p 外都是零。由于 S_p 的形状可能不规则, 记表面 S_p 的封闭边界曲线方程是 $b[b(x_i)]=0$, 假设在表面 S_p 内, $b(x_i)<0$, 而在表面 S_p 外, $b(x_i)>0$, 把 Heaviside 函数扩展为

$$H[b(x_i)]=\begin{cases}1, & b(x_i)\geqslant 0\\ 0, & b(x_i)<0\end{cases} \tag{16.146}$$

这样就可以把部分边界条件的积分扩展到全表面 S, 即

$$\iint_{S_p}\bar{p}_iu_i\mathrm{d}^2x=\iint_S H[b(x_i)]\bar{p}_iu_i\mathrm{d}^2x=\iint_S H[b(x_i)]\bar{\sigma}_{ij}n_ju_i\mathrm{d}^2x \tag{16.147}$$

从而有

$$\begin{aligned}&\iint_S H[b(x_i)]\bar{\sigma}_{ij}n_ju_i\mathrm{d}^2x\\ =&\iiint\{H[b(x_i)]u_i\bar{\sigma}_{ij}\}_{,j}\mathrm{d}^3x\\ =&\iiint\{H[b(x_i)]\bar{\sigma}_{ij,j}u_i+H[b(x_i)]\bar{\sigma}_{ij}u_{i,j}+\delta[b(x_i)]b_{,j}u_i\bar{\sigma}_{ij}\}\mathrm{d}^3x\\ =&\iiint\{H[b(x_i)]\bar{\sigma}_{ij,j}u_i+H[b(x_i)]\bar{\sigma}_{ij}u_{i,j}\}\mathrm{d}^3x\end{aligned} \tag{16.148}$$

这时弹性力学势能的守恒律就变为

$$\begin{aligned}&X^{(1)}A-f_iXu_i-H[b(x_i)]\bar{\sigma}_{ij}X^{(1)}u_{i,j}-H[b(x_i)]\bar{\sigma}_{ij,j}u_i-\\ &\{A-f_iu_i-H[b(x_i)]\bar{\sigma}_{ij,j}u_i-H[b(x_i)]\bar{\sigma}_{ij}u_{i,j}\}D(\xi+\eta+\zeta)=0\end{aligned} \tag{16.149}$$

16.8.2 弹性余能的 Noether 守恒律

以应力 σ_{ij} 为变量的弹性余能 W_c 可表达为

$$W_\mathrm{c}=\iiint B(\sigma_{ij})d^3x-\iint_{S_u}\bar{u}_in_j\sigma_{ij}d^2x,\quad \delta W_\mathrm{c}=0 \tag{16.150}$$

其中, u_i 为已知位移, $B(\sigma_{ij})$ 为单位弹性余能, σ_{ij} 为应力张量分量, S_u 为位移已知的表面 (一般不是封闭的全表面)。

面积分的问题主要是 S_u 不一定是全表面, 所以一般不能把面积分转化为体积分。

如果是全表面, 把表面力转化为应力, 有

$$\iint_{S_u} \bar{u}_i n_j \sigma_{ij} \mathrm{d}^2 x = \iiint (\bar{u}_i \sigma_{ij})_{,j} \mathrm{d}^3 x \tag{16.151}$$

余能泛函

$$W_{\mathrm{c}} = \iiint [B(\sigma_{ij}) - \bar{u}_{i,j}\sigma_{ij} - \bar{u}_i \sigma_{ij,j}] \mathrm{d}^3 x \tag{16.152}$$

微小变化

$$W_{\mathrm{c}}^* = \iiint [B(\sigma_{ij}^*) - \bar{u}_{i,j}\sigma_{ij}^* - \bar{u}_i \sigma_{ij,j}^*] \mathrm{d}^3 x^* \tag{16.153}$$

Lie 群对称性

$$W_{\mathrm{c}}^* = W_{\mathrm{c}} \tag{16.154}$$

对称性可以写为

$$XB - \bar{u}_i X \sigma_{ij} - \bar{u}_i X^{(1)} \sigma_{ij,j} + (B - \bar{u}_i \sigma_{ij} - \bar{u}_i \sigma_{ij,j}) D(\xi + \eta + \zeta) = 0 \tag{16.155}$$

其中, 应力 σ_{ij} 的无穷小生成元 $X = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \zeta\partial_z$, $X^{(1)}$ 为一次延拓, D 为全导数。

如果不考虑边界条件, 将式 (6.155) 简化为 Noether 守恒律, 即

$$XB + BD(\xi + \eta + \zeta) = 0 \tag{16.156}$$

如果边界条件不是全表面, 而是部分表面, 用同样的方法, 可以得到守恒律

$$\begin{aligned} &XB - H[b(x_i)]\bar{u}_i X \sigma_{ij} - H[b(x_i)]\bar{u}_i X^{(1)} \sigma_{ij,j} + \\ &\{B - H[b(x_i)]\bar{u}_i \sigma_{ij} - H[b(x_i)]\bar{u}_i \sigma_{ij,j}\} D(\xi + \eta + \zeta) = 0 \end{aligned} \tag{16.157}$$

16.9 二维流体边界层方程的 Lie 群对称性分析

1904 年, Prandtl 提出了黏性边界层的概念, 他导出一组偏微分方程

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ &u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned} \tag{16.158}$$

和相应的边界条件。这个问题有两个自变量 x, y, 两个因变量 u, v, 所以其无穷小生成元为

$$X = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \phi\partial_u + \psi\partial_v \tag{16.159}$$

由于方程中有对 y 的二阶导数, 所以必须考虑二次延拓

$$\begin{aligned} X^{(2)} = X &+ \phi_x \partial_{u_x} + \phi_y \partial_{u_y} + \psi_x \partial_{v_x} + \psi_y \partial_{v_y} + \phi_{xx} \partial_{u_{xx}} + \\ &\phi_{xy} \partial_{u_{xy}} + \phi_{yy} \partial_{u_{yy}} + \psi_{xx} \partial_{v_{xx}} + \psi_{xy} \partial_{v_{xy}} + \psi_{yy} \partial_{v_{yy}} \end{aligned} \tag{16.160}$$

注意全导数 $D_x = \partial_x + u_x\partial_u + v_x\partial_v$, 其中系数

$$
\begin{aligned}
\phi_{u_x} &= D_x(\phi) - u_x D_x(\xi) - u_y D_x(\eta) \\
&= (\partial_x + u_x\partial_u + v_x\partial_v)\phi - u_x(\partial_x + u_x\partial_u + v_x\partial_v)\xi - \\
&\quad u_y(\partial_x + u_x\partial_u + v_x\partial_v)\eta \\
\phi_{u_y} &= D_y(\phi) - u_x D_y(\xi) - u_y D_y(\eta) \\
&= (\partial_y + u_y\partial_u + v_y\partial_v)\phi - u_x(\partial_x + u_y\partial_u + v_y\partial_v)\xi - \\
&\quad u_y(\partial_y + u_y\partial_u + v_y\partial_v)\eta \\
\phi_{v_y} &= D_y(\psi) - v_x D_y(\xi) - v_y D_y(\eta) \\
&= (\partial_y + u_y\partial_u + v_y\partial_v)\phi - v_x(\partial_y + u_y\partial_u + v_y\partial_v)\xi - \\
&\quad v_y(\partial_y + u_y\partial_u + v_y\partial_v)\eta \\
\phi_{u_{yy}} &= D_y(\phi_y) - u_{yx} D_y(\xi) - u_{yy} D_y(\eta)
\end{aligned}
\tag{16.161}
$$

其他的项对这个问题不重要。这样, 当 Prandtl 方程成立时, 有对称性条件方程

$$
\begin{aligned}
X^{(2)}(u_x + v_y) &= 0 \\
X^{(2)}(uu_x + vy_y - \nu u_{yy}) &= 0
\end{aligned}
\tag{16.162}
$$

可得到

$$
\begin{aligned}
\phi_x + \psi_y &= 0 \\
\phi u_x + u\phi_x + \psi u_y + v\psi_y - \nu\phi_{yy} &= 0
\end{aligned}
\tag{16.163}
$$

这是两个有关 $u_y, v_x, v_y, v_{xx}, v_{yy}$ 的多项式, 比较它们的系数可以得到

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\eta}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial\phi}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial\xi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\xi}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial\xi}{\partial v} = 0 \\
\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\xi}{\partial x} - \frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial u} + \frac{\partial\psi}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial u} - \frac{\partial\eta}{\partial x} = 0 \\
u\frac{\partial\phi}{\partial x} + v\frac{\partial\phi}{\partial y} - \nu\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0, \quad 2u\frac{\partial\eta}{\partial u} - v\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial v} = 0 \\
-\phi + u\frac{\partial\xi}{\partial x} - 2u\frac{\partial\eta}{\partial y} = 0, \quad 2v\frac{\partial\eta}{\partial u} + \nu\frac{\partial^2\eta}{\partial y\partial u} = 0 \\
\psi - u\frac{\partial\eta}{\partial x} + v\frac{\partial\eta}{\partial y} - \nu\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial u} + \nu\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} = 0
\end{gathered}
\tag{16.164}
$$

整理后得到

$$
\begin{gathered}
\xi = a_1 + a_3 x, \quad \eta = a_2 - a_4 y + \alpha(x) \\
\phi = a_3 u + 2ua_4, \quad \psi = a_4 v + u\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}
\end{gathered}
\tag{16.165}
$$

其中, a_i 和 α 分别为任意常数和函数。这样就得到相应的 Lie 群为

$$
\begin{aligned}
&(x,y,u,v)\mapsto(x+a_1,y,u,v)\\
&(x,y,u,v)\mapsto(x,y+a_2,u,v)\\
&(x,y,u,v)\mapsto(\mathrm{e}^{a_3}x,y,\mathrm{e}^{a_3}u,v)\\
&(x,y,u,v)\mapsto(x,\mathrm{e}^{-a_4}y,\mathrm{e}^{2a_4}u,\mathrm{e}^{a_4}v)\\
&(x,y,u,v)\mapsto\left(x,y+\alpha(x),u,v+u\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}\right)
\end{aligned}
\tag{16.166}
$$

如果 $u=f(x,y,t)$, $v=g(x,y,t)$ 为问题的解, 那么其一般的解为①

$$
u=\mathrm{e}^{a_3+2a_4}f[\mathrm{e}^{a_3}x+a_1,\mathrm{e}^{-a_4}(y+\alpha)+a_2] \tag{16.167}
$$

$$
\begin{aligned}
v&=\mathrm{e}^{a_4}\left\{g[\mathrm{e}^{a_3}x+a_1,\mathrm{e}^{-a_4}(y+\alpha)+a_2]+u\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}\right\}\\
&=\mathrm{e}^{a_4}g[\mathrm{e}^{a_3}x+a_1,\mathrm{e}^{-a_4}(y+\alpha)+a_2]+\\
&\quad\mathrm{e}^{a_3+3a_4}f[\mathrm{e}^{a_3}x+a_1,\mathrm{e}^{-a_4}(y+\alpha)+a_2]\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}
\end{aligned}
\tag{16.168}
$$

上面使用 u,v 作为变量研究了边界层方程的对称性, 下面使用流函数来研究。

如果引入流函数 ψ, 使速度分量 $u=\partial\psi/\partial y, v=-\partial\psi/\partial x$, 那么其连续性方程 $\partial u/\partial x+\partial v/\partial y=0$ 就可以自动满足。针对稳态的平板边界层层流, 得到如下形式的 Prandtl-Blasius 方程:

$$
\mathscr{T}(x,y,\psi)=\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}=0 \tag{16.169}
$$

其中

$$
u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{16.170}
$$

在当 $y=0$ 时 $\psi=0$ 的条件下, 这个方程所允许的非平凡的 Lie 群相似性变换只有作用在变量 (x,y,ψ) 上的拉伸群。运用 Lie 群分析寻找相似不变解, Prandtl-Blasius边界层方程是一个经典的例子。对于层流平板边界层, 可以直接根据 Lie 群对称性分析, 给出原始的 Prandtl-Blasius 方程的相似性变换, 得到最后的常微分方程的形式, 详细的过程见参考文献 [83], [109] 和 [110]。

根据对称性条件 $\mathscr{T}(x^*,y^*,\psi^*)=0$, 以及无穷远处速度恒定为 $\partial_y\psi=u_\infty$。按照上面的 Lie 群对称性分析, 即可得到拉伸群变换

$$
S_\lambda:\quad x^*=\mathrm{e}^{2\lambda}x,\quad y^*=\mathrm{e}^{\lambda}y,\quad \psi^*=\mathrm{e}^{\lambda}\psi \tag{16.171}
$$

其相应的无穷小生成元为

$$
\xi_x=2\lambda x,\quad \xi_y=\lambda y,\quad \eta=\lambda\psi \tag{16.172}
$$

① 说明: 这里的一般解由本书第一次具体写出。

以及 Lie 群算符为

$$X = \xi_x \partial_x + \xi_y \partial_y + \eta \partial_\psi \tag{16.173}$$

因此, 可以求解出拉伸群的两个不变量(相似变量), 即如下特征线方程的首次积分:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\xi_x} = \frac{\mathrm{d}y}{\xi_y} = \frac{\mathrm{d}\psi}{\eta} \tag{16.174}$$

第一项和第二项相等得到不变量 $\beta = y/\sqrt{x}$; 第一项和第三项相等得到不变量 $\varphi = \psi/\sqrt{x}$。这两者又可以无量纲化为 $\beta = y/\sqrt{\nu x/u_\infty}$ 和 $\varphi = \psi/\sqrt{\nu x u_\infty}$, 代入原始的微分方程 [式 (16.169)], 便得到广为熟知的由相似变量表达的 Blasius 层流方程 (这个方程在相似论中也做过介绍)

$$2\frac{\mathrm{d}^3\varphi}{\mathrm{d}\beta^3} + \varphi\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\beta^2} = 0 \tag{16.175}$$

可见, Lie 群不变量 (相似变量) 将偏微分方程降为一个常微分方程来求解, 而相似变量变换本身可以由方程的对称性确定。

这个问题曾在相似变量一节讨论过, 读者可以看出相似变量与这里的不变量完全是一样的, 这也说明量纲分析的相似论实际上是 Lie 群的一个特殊情况。

陈曦[111] 讨论了以上 Lie 群不变量的物理含义, 以及平板层流边界层所具有的 Lie 群对称性。注意从平板层流边界层的任何一个初始点状态 $A:(x,y,\psi)$ 开始, 在 Lie 群 S_λ 作用下, 不论 λ 如何变化, 相似变量 F_1 和 F_2 一直保持初始值不变。将变换之后的状态称为 Lie 群拟态 A^*: (x^*,y^*,ψ^*), 因为尽管 Lie 群对称性变换让方程保持不变, 但仍不能确定它是否是真实的层流状态 $B:(x^*,y^*,\psi^{\mathrm{ES}})$, 上标 ES (empirical solution) 表示计算或者实验的经验解。如果的确是这样的, 那么就说流函数的拉伸对称性是存在的; 如果不是, 那就称为对称破缺。

当然, 由于 Blasius[19] 已经将式 (16.175) 求解出来, 并且与实验数据精确符合, 因此, 我们知道流函数的拉伸对称性的确是存在的, 即

$$\psi \Rightarrow \psi^*(\text{变换后的变量}) \mapsto \psi^{\mathrm{ES}}(\text{经验解}) \tag{16.176}$$

相似解是这样构建出来的, 可以先假定这个拟态 A^* 就是真实的状态 B, 接着开始考虑在此对称性条件下的相似解。正如前面所提到的, 相似解一定是不变量的函数, 简写为 $f(\beta,\varphi)=0$ 或者 $\varphi = f(\beta)$, 即

$$\varphi = f(\beta) \Rightarrow \frac{\psi}{\sqrt{\nu x u_\infty}} = f\left(\frac{y}{\sqrt{\dfrac{\nu x}{u_\infty}}}\right) = f(\eta) \tag{16.177}$$

这便得到了 Blasius 的相似解的一般表达。

可见, 式 (16.175) 求解出来的 $\psi = \sqrt{\nu x u_\infty} f(\eta)$ 不仅是原 Prandtl-Blasius 方程的解, 而且在拉伸群 S_λ 变换下保持函数形式不变, 即同时满足以下两个方程:

$$\begin{aligned} \mathscr{T}\psi(x,y,\psi) &= 0 \\ X\psi(x,y,\psi) &= 0 \end{aligned} \tag{16.178}$$

由此, 寻找相似解有两个步骤: 一是寻找 Lie 群对称性变换及其不变量; 二是寻找满足方程解的由不变量组成的函数。前者为后者提供了一个台阶和基础, 或者说是约束。可以构建满足第二个方程的特定函数形式, 并通过经验数据来检验是否满足第一个方程。也就是说, 经验上找到了相似解, 或者说从经验上验证了 Lie 群对称性的存在。

注意求解出的拉伸群变换 S_λ, 对于层流流场中所有的点都是相同的。当湍流发展起来后, 首先, 这种均一的拉伸变换可能会破坏, 而重建 (自组织原理的运用) 的结果即表现为不同层结构的拉伸对称性。其次, 哪些平均量具有对称性, 也需要新的探索。也就是说, 如果流函数的完全对称性破缺, 那是否仅在平均流向速度上具有对称性? 甚至, 平均速度的对称性也破缺了, 仅在湍流脉动对平均场的影响上具有对称性?

16.10 不可压流体的湍流问题

湍流是一种复杂的运动形态, 是挑战人类智慧的基础科学问题。湍流研究可以追溯到 15 世纪的文艺复兴时期的科学大师 L. da Vinci, 由于其极大的复杂性, 至今没有获得真正的突破。

这个问题的难点是湍流Reynolds 方程的封闭性问题, 就是利用 Reynolds 速度分解方程中无论如何都会有不确定的项。利用 Lie 群对称方法分析湍流问题可以参考 Cantwell 等的文献[83,109,110]。

有关这方面的最新研究成果是由北京大学佘振苏领导的团队得到的, 主要成果见陈曦的博士论文[111] 和参考文献 [112]、[113]。在 Lie 群分析的基础上, 他们提出一个序函数的概念来处理速度平均场的对称破缺问题。发现由于槽道及管流的边界条件, 只允许存在拉伸不变群 (而非伽利略群), 而拉伸相似解的基本形式是标度律。但是, 数值和实验的经验数据所给出的是一个复杂的、包含多个行为的速度剖面, 不能期望以一个单独的拉伸不变的标度解来刻画平均速度 (Barenblatt 的标度律正是基于这样的假设)。因此, 认为平均速度剖面的拉伸不变性是破缺的。那么, 问题就是如何处理对称破缺。

参考文献 [112] 提出, 平均速度虽然出现对称破缺, 但是, 总是存在一些保留对称性良好的量, 称为序函数。这些序函数是什么呢? 这些量与高阶相关函数相联系, 与湍流脉动相联系。在平均动量方程中, 就是与雷诺应力相联系。于是选择了 Prandtl 的混合长来开展 Lie 群分析, 并分别按照黏性底层、缓冲层、主流

层和中心层来依次寻找混合长的拉伸不变性, 充分运用已有的物理知识。这正是先前 Lie 群分析中所缺少的。混合长所展示的对称性, 反映的是湍流脉动的相似性。于是, 引进了新的变量, 即混合长及其导数, 构成扩展的变量空间, 这是克服经典 Lie 群分析所遇到的瓶颈的重要举措。

这里, 混合长正是描述了湍流脉动 (雷诺应力) 对平均剪切的影响。进一步说, 当按照拉伸群进行变换时, 混合长及其导数在空间存在局部不变性, 这一不变性反映的是湍流脉动在同一层内是定性一致的。于是, 所假设的 Lie 群拉伸不变性是有物理内容的。

首先他们以边界层奇异扰动理论为基础, 建立槽道或者管流内区、外区流动的平衡方程对称性分析的基本框架。这是将对称性分析与奇异扰动理论进行对接, 考虑到了内、外区满足不同的 Reynolds 数相似性标度。同时, 他们发现了混合长的三类相似性, 它们的对称性层次逐次减弱, 这就给出三类相似解形式。

有关这个专题的详细研究请参考陈曦的博士论文和其相关文献[111-113]。

第十七章
量纲理论与 Lie 群

作为本书的结尾, 这里介绍量纲理论与 Lie 群的关系。在量纲分析的最后, 曾指出量纲分析或理论实际是一种量纲变换不变性, 只不过这种变换不是一般性的变换, 而是 Lie 群中的一种特殊变换, 即拉伸变换, 所不同的是, 以上研究的都是单参数的变换群, 而一般的量纲理论却是基于多参数的不变拉伸变换群, 或称为拉伸群[74-76]。也就是说, 量纲理论只是 Lie 群的一个特殊情况, 或者说 Lie 群方法更一般, 因为它不仅有拉伸群, 而且有平移、转动等一般的变换。

17.1 多参数拉伸群

设有实空间 $Z = X \times Y$, 其中实子空间 $X = R^n(\boldsymbol{x}), Y = R^m(\boldsymbol{y})$。如果空间 X 的基是 $\{\boldsymbol{e}_i\} \subset X$, 空间 Y 的基是 $\{\boldsymbol{f}_k\} \subset Y$, 那么, 空间 Z 的基是 $\{\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{f}_k\} \subset Z$, 所以空间 Z 也可以作为空间 X, Y 的直和 $Z = X \oplus Y$。这样, 如果把空间 X, Y 中的向量 $\boldsymbol{x} \in X, \boldsymbol{y} \in Y$ 写成分量的形式, 即 $\boldsymbol{x} = x^i \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{y} = y^k \boldsymbol{f}_k$, 那么对应于空间 Z 的向量 $\boldsymbol{z} \in Z$ 在基 $\{\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{f}_k\}$ 上的展开, 可以写为

$$\boldsymbol{z} = x^i \boldsymbol{e}_i + y^k \boldsymbol{f}_k \tag{17.1}$$

空间 Z 的基 $\{\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{f}_k\}$ 上的拉伸变换 $h: Z \mapsto Z$, 作用在式 (17.1) 得到

$$h(\boldsymbol{z}) = \sum_{i=1}^{n} c^i x^i \boldsymbol{e}_i + \sum_{k=1}^{m} d^k y^k \boldsymbol{f}_k, \quad (c^i > 0, \quad d^k > 0) \tag{17.2}$$

显然, 空间 Z 在基 $\{\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{f}_k\}$ 上的拉伸是线性变换, 而且矩阵对角线上的每个元素都为正。所有拉伸变换的集合产生一个在空间 Z 上可交换的群, 即 Abel 群, 这个群用 Diag $Z\{\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{f}_k\}$ 表示, 其中 Diag 表示对角。当然, 这个 Abel 群 Diag $Z\{\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{f}_k\}$ 是一个含有 $(n+m)$ 个参数的 Lie 群。

如果一个子群 $H \subset \mathrm{Diag} Z\{\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{f}_k\}$, 就称 H 为空间 Z 的一个拉伸群。拉伸群 H^r 表示具有量纲 r 的 Lie 群, 其中, $0 < r \leqslant n+m$。

还可以看出, Abel 群 Diag $Z\{\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{f}_k\}$ 的单位元就是一个单位矩阵。为了方便, 可以这样选一个拉伸群 H^r 的参数群 (B, ϕ), 即在固定基 $\{\boldsymbol{u}_\alpha\} \subset B$ 上, 它的群核是 $B^+\{\boldsymbol{u}_\alpha\}$, 其中, $\boldsymbol{a} = a^\alpha \boldsymbol{u}_\alpha$, 并满足条件 $a^\alpha > 0$ $(\alpha = 1, \cdots, r)$。那么, 在 $B^+\{\boldsymbol{u}_\alpha\}$ 的乘积律定义为 $\phi(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{\alpha=1}^{r} a^\alpha b^\alpha \boldsymbol{u}_\alpha$, 其中的单位元是向量 $\boldsymbol{I}_0 = \sum_{\alpha=1}^{r} \boldsymbol{u}_\alpha$。在这些条件下, 一般变换 $h_\alpha \in H^r$ 就具有以下形式:

$$\bar{x}^i = x^i \prod_{\alpha=1}^{r} (a^\alpha)^{\lambda_\alpha^i}, \quad \bar{y}^i = y^k \prod_{\alpha=1}^{r} (a^\alpha)^{\lambda_\alpha^k}, \quad (i = 1, \cdots, n; k = 1, \cdots, m) \tag{17.3}$$

由于乘积部分相当于常数, 因此以上的变换是拉伸变换, 对应的群为拉伸群。

17.2 量纲理论

我们知道任意一个物理量 $\varPhi$ 都可以表达成其量纲 E 的倍数 $|\varPhi|$, 即

$$\varPhi = |\varPhi| \mathrm{E} \tag{17.4}$$

当有多个基本量纲时, 即 $\mathrm{E}_\alpha (\alpha = 1, 2, \cdots, r)$ 是不同量纲, 那么物理量的组合量纲 E 为

$$\mathrm{E} = \dim \varPhi = \mathrm{E}_1^{\lambda_1} \cdots \mathrm{E}_r^{\lambda_r} \tag{17.5}$$

所以, 物理量可以表达为

$$\varPhi = |\varPhi| \mathrm{E} = |\varPhi| \mathrm{E}_1^{\lambda_1} \cdots \mathrm{E}_r^{\lambda_r} \tag{17.6}$$

如果物理量 $\varPhi$ 是 x 的函数, 那么 $\varPhi$ 对于 x 的导数的量纲定义为

$$\dim \partial_x \varPhi = \frac{\dim \varPhi}{\dim x} \tag{17.7}$$

如果所有的幂次 $\lambda_k = 0, k = 1, 2, 3, \cdots, r$, 就说物理量 $\varPhi$ 是无量纲量。

如果这里有 N 个无量纲量, 即 $\Phi_1, \cdots, \Phi_N$。显然, 对于非零幂次 $\chi_1, \cdots, \chi_N$, 组合

$$\Phi_1^{\chi_1}, \cdots, \Phi_N^{\chi_N} \tag{17.8}$$

也是无量纲量。对于非零幂次 $\chi_1, \cdots, \chi_N$, 这时也说 $\Phi_1, \cdots, \Phi_N$ 是相关的; 反之, 则说 $\Phi_1, \cdots, \Phi_N$ 是无关的。

量纲理论 (分析) 的核心问题就是要确定有多少自变物理量用基本物理量 $\Phi_1, \cdots, \Phi_N$ 来表示, 然后把其他的物理量用这些自变量表示。

对于量纲的变换, 例如从量纲 E_α 变换到量纲 E'_α, 即两个量纲间有关系

$$\mathrm{E}_\alpha = a^\alpha \mathrm{E}'_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, 3, \cdots, r) \tag{17.9}$$

量纲的变换必然导致相应的变换, 这时物理量 Φ 在新的量纲系统中可以表达为

$$\Phi = |\Phi| \dim \Phi = |\Phi| \mathrm{E}_1^{\lambda_1} \cdots \mathrm{E}_r^{\lambda_r} = |\Phi| (a^1)^{\lambda_1} \cdots (a^r)^{\lambda_r} (\mathrm{E}'_1)^{\lambda_1} \cdots (\mathrm{E}'_r)^{\lambda_r} \tag{17.10}$$

如果记 $\dim \Phi' = (\mathrm{E}'_1)^{\lambda_1} \cdots (\mathrm{E}'_r)^{\lambda_r}$ 是物理量 Φ 在新量纲系统中的量纲, 由于一个物理量不应该随着量纲的改变而改变, 即物理量与量纲选择无关, 就是物理量的不变性, 有

$$\Phi = \Phi' \tag{17.11}$$

即

$$|\Phi| \dim \Phi = |\Phi'| \dim \Phi' \tag{17.12}$$

所以, 可以得到变换后的物理量的数值

$$|\Phi'| = |\Phi| (a^1)^{\lambda_1} \cdots (a^r)^{\lambda_r} = |\Phi| \prod_{\alpha=1}^{r} (a^\alpha)^{\lambda_\alpha} \tag{17.13}$$

把式 (17.13) 与拉伸群的关系式 (17.3) 进行比较可以看出, 由量纲系统的变换引起物理量 Φ 的数值的变换, 就是拉伸群 H^r 的群变换。

量纲分析与 Lie 群之间有本质上的联系。量纲理论的任何结果都可以从拉伸群的角度得到。换句话说, 量纲分析是 Lie 群的一个特殊情况, Lie 群的拉伸群是量纲分析的数学基础。

参考文献

[1] Fourier J B J. Analytical theory of heat [M]. New York: Dover Publications, 1955.

[2] Maxwell J C. A treatise on electricity and magnetism [M]. Cambridge: Clarendon Press,1891; New York: Dover Publications, 1954.

[3] Buckingham E. On physically similar systems: Illustration of the use of dimensional equations [J]. Phys. Rev., 1914, 4: 345-376.

[4] Buckingham E. The principle of similitude [J]. Nature. 1915, 96: 396-397.

[5] Bridgman P W. Dimensional analysis [M]. New Haven: Yale University Press, 1922.

[6] Riabouchinsky P. The principle of similitude: Letter to the editor [J]. Nature, 1915, 95: 591.

[7] 钱伟长. 应用数学 [M]. 合肥: 安徽科学技术出版社, 1993.

[8] Çengel Y A, Cimbala J M. Fluid mechanics fundamentals and applications [M]. New York: The McGraw-Hill Education, 2010.

[9] Isenberg C. The science of soap films and soap bubbles [M]. New York: Dover, 1992.

[10] Anderson J D. Hypersonic and high-temperature gas dynamics [M]. Reston: AIAA, 2006.

[11] Oswatitsch K. Antriebe mit Heizung bei Überschallgeschwindigkeit [R]. Köln/Opladen: Westdeutscher Verlag, 1959.

[12] Rayleigh L. The principle of similitude [J]. Nature, 1915, 95: 66-68.

[13] Huntley H E. Dimensional analysis [M]. New York: Dover Publications, 1967.

[14] Siano D. Orientational analysis: A supplement to dimensional analysis: I [J]. J. Franklin Institute, 1985,320(320): 267.

[15] Siano D. Orientational analysis: Tensor analysis and the group properties of the SI supplementary units: Ⅱ [J]. J. Franklin Institute, 1985, 320(320): 285.

[16] Barenblatt G I. Similarity, self-similarity, and intermediate asymptotics [M]. New York: Consultants Bureau, Plenum Press, 1979.

[17] Anderson J D. A history of aerodynamics and its impact on flying machines [M]. New York: Cambridge University Press, 1999.

[18] Prandtl L. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandlungen d. III [C]// Internat. Math. Kongr. Heidelberg, 8-13 Aug., 1904, B. G. Teubner, Leipzig, 1905: 485-491 (In [50]: p. 575).

[19] Blasius H. Grenzschichten in Flüssigkeiten mit Kleiner Reibung [D]. Göttingen: University of Göttingen, 1907.

[20] Taylor G I. A formulation of Mr. Tuck's conception of munroe jets (1943) [R]. New

York: Cambridge University Press, 1962, 358-362.

[21] 戴兰宏. 工程科学前沿的拓荒者 —— 郑哲敏 [J]. 力学进展, 2013, 43(3): 265-294.

[22] 郑哲敏. 破甲过程初步分析及一些基础知识 [J]. 力学情报, 1973, 5: 36-74.

[23] 郑哲敏. 聚能射流的稳定性问题 [R]. 中国科学院力学研究所研究报告, 1977.

[24] Crady D E. Fragmentation of rapidly expanding jets and sheets [J]. Int. J. Impact Engineering, 1987, 5: 285-292.

[25] 孙博华. 聚能射流的稳定性问题的一个注记 [R/OL]. DOI: 10. 13140/RG. 2. 1. 1928. 3284. (2015-12-1) https://www.researchgate.net/publication/285322318.

[26] 谈庆明. 高速冲击模型律 [C]// 冲击动力学进展. 合肥: 中国科技大学出版社, 1992: 303-320.

[27] 谈庆明. 量纲分析 [M]. 合肥: 中国科技大学出版社, 2007.

[28] Tan Qingming. Dimensional analysis [M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.

[29] 孙博华. 射流和薄板的快速动力扩展断裂问题的一个注记 [R/OL]. DOI: 10. 13140/RG. 2. 1. 3697. 8004. (2015-12-1) https://www.researchgate.net/publication/285322534.

[30] 郑哲敏. 连续介质力学与断裂 [J]. 力学进展, 1982, 12(2): 133-140.

[31] 赵亚溥. 断裂力学中的相似方法及尺度律 [J]. 力学与实践, 1995, 17(5): 11-16,80.

[32] 李青, 王天舒, 马兴瑞. 充液航天器液体晃动和液固耦合动力学的研究与应用 [J]. 力学进展, 2012, 42(4): 472-480.

[33] Abramson N H, Ransleben G E. Jr. Simulation of fuel sloshing characteristics in missile tanks by use of small models [J]. Amer. Rocket Soc. Jour., 1960, 30: 603-613.

[34] 孙博华. 航天器液体推进剂的晃动问题[R/OL]. DOI: 10. 13140/RG. 2. 1. 3435. 6565. (2015-12-1) https://www.researchgate.net/publication/285322551.

[35] Fay J A. The spread of oil slicks on a calm sea [C]// Hault D P. Oil on the Sea. New York, 1969: 53-63.

[36] Richardson L F. Weather Prediction by Numerical Process [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1922.

[37] Kolmogorov A N. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number [J]. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1941, 30: 299-303.

[38] Kolmogorov A N. Dissipation of energy in locally isotropic turbulence [J]. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1941, 32: 16-18.

[39] Wang J. Cascade of kinetic energy and thermodynamic process in compressible turbulence [R]. Postdoctoral Research Report, Peking University, 2014.

[40] Kadomtsev B B, Petviashvili V I. Acoustic turbulence [J]. Soviet Physics Doklady, 1973, 18: 115-118.

[41] Moiseev S S, Toor A V, Yanovsky V V. The decay of turbulence in the burgers model [J]. Physica D, 2, 1981: 187-193.

[42] Shivamoggi B K. Multifractal aspects of the scaling laws in fully developed compressible turbulence [J]. Annals of Physics, 1995, 243: 169-176.

[43] Barenblatt G I. Dimensional Analysis [M]. New York: Gordon and Breach, 1987.

[44] Barenblatt G I. Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotic [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

[45] Sun B H. The spatial scaling laws of compressible turbulence [R/OL]. arXiv: 1502. 02815v2 [physics. flu-dyn], 2015.

[46] Sun B H. The scaling laws of compressible turbulence [C]// Fourth African Conference on Computational Mechanics, Marrakech, Morocco, 7-9 January, 2015.

[47] Sun B H. The temporal scaling laws of compressible turbulence [C]// The 3rd Int. Workshop on Nonlinear and Modern Mathematical Physics, Cape Town, South Africa, 9-11 April, 2015.

[48] Lighthill M J. On sound generated aerodynamically: I. General theory [J]. Proc. R. Soc. Lond. A, 1952, 211: 564-587.

[49] Lighthill M J. On sound generated aerodynamically: Ⅱ. Turbulence as a source of sound [J]. Proc. R. Soc. Lond. A, 1954, 222: 1-32.

[50] Sun B H. Universal scaling laws on sound generated aerodynamically [C]// The 23rd International Congress on Sound and Vibration, Athens, Greece, 10-14 July, 2016.

[51] 孙博华. 湍流噪声的统一标度律 [R/OL]. DOI: 10. 13140/RG. 2. 1. 2256. 0084. (2015-12-1) https://www.researchgate.net/publication/285322384.

[52] Taylor G I. The formation of blast wave by a very intense explosion [R]. UK Ministry of Home Security, 1941.

[53] Taylor G I. The formation of a blast wave by a very intense explosion: I. Theoretical discussion [J]. Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences, 1950, 201(1065): 159-174.

[54] Taylor G I. The formation of a blast wave by a very intense explosion: Ⅱ. The atomic explosion of 1945 [J]. Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences, 1950, 201(1065): 175-186.

[55] Clark R W. The birth of the bomb: The untold story of Britain's Part in the weapon that changed the world [M]. London: Phoienix House, 1961.

[56] von Neumann J. The Point Source Solution [R]. NDRC Div. B Report AM-9, 1941.

[57] von Neumann J. Blast wave [R]. Los Alamos Sci. Lab. Tech. Series, Vol. 7, Part 2, August 13, 1947.

[58] Sedov L I. Propagation of strong blast waves [J]. Appl. Math. Mech., 1946,10: 241-250.

[59] Sedov L I. Similarity and dimensional analysis in mechanics [M]. New York: Academic Press, 1959.

[60] 王振亭, 郑晓静. 草方格沙障尺寸分析的简单模型 [J]. 中国沙漠, 2002,22(3): 229-232.

[61] 孙博华. 复杂力学问题的分析 [R]. 北京科技大学学术报告, 北京, 2014.

[62] 孙博华. 沙漠治理中草方格的障沙问题的标度率 [R/OL]. DOI: 10. 13140/RG. 2. 1. 4877. 4485. (2015-12-1) https://www.researchgate.net/publication/285322401.

[63] Sun B H. The similarity laws of MEMS gyro with temperature compensation [C]// The 21st International Congress of Sound and Vibration, Beijing, 2014.

[64] 孙博华. 水力压裂问题的标度率[R/OL]. DOI: 10. 13140/RG. 2. 1. 1993. 8647. (2015-12-1) https://www.researchgate.net/publication/285322686b.

[65] Tsien H S. Similarity laws of hypersonic flows [J]. J. Math. Phys., 1946, 25: 247-251.

[66] Yaglom I M. Felix Klein and Sophus Lie: Evolution of the idea of symmetry in the nineteenth century [M]. Boston: Birkhauser, 1988.

[67] Lie S. Theorie der transformationsgruppen: I [M]. Leipzig: B. G. Teubner, 1888.

[68] Lie S. Theorie der transformationsgruppen: Ⅱ [M]. Leipzig: B. G. Teubner, 1890.

[69] Lie S. Theorie der transformationsgruppen: Ⅲ [M]. Leipzig: B. G. Teubner, 1893.

[70] Hawkins T. Emergence of the theory of Lie groups [J]. New York: Springer-Verlag, 2000.

[71] Page J M. Ordinary differential equation, with an introduction of Lie theory of the group of one parameter [M]. London: Macmillan and Co. Limited, 1897.

[72] Cohen A. An introduction to the Lie theory of one-point parameter groups [M]. D. C.: Heath and Co. Publishers, 1911.

[73] Ince E L. Ordinary differential equations [M]. New York: Dover Publications, 1926.

[74] Birkhoff G. Hydrodynamics [M]. Princeton: Princeton University Press, 1950.

[75] Ovsiannikov L V. Group analysis of differential equations [M]. Moscow: Nauka, 1962.

[76] Ames W F. Nonlinear partial differential equations in engineering [M]. New York: Academic Press, 1965.

[77] Bluman G W, Anco S. Symmetry and integration methods for differential equations [M]. New York: Springer-Verlag, 2002.

[78] Ibragimov N K. Group analysis of ordinary differential equations and the invariance principle in mathematical physics [J]. Russian Math: Surveys, 1992, 47(2): 89-156.

[79] Hill J M. Differential equations and group methods for scientists and engineers [M]. Boca Raton: CRC Press, 1992.

[80] Ibragimov N H, Mahomed F M. CRC handbook of Lie group analysis of differential equations: vol. 3 [M]. Boca Raton: CRC Press, 1996.

[81] Olver P J. Applications of Lie groups to differential equations [M]. New York: Springer, 1986.

[82] Hydon P. Symmetry methods for differential equations: A beginner's guide [M]. New York: Cambridge University Press, 2000.

[83] Cantwell B J. Introduction to symmetry analysis [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

[84] Courant R H D. Methods of mathematical physics [M]. New York: Wiley-Interscience, 1962.

[85] Emanuel G. Solution of ordinary differetial equations by continuous groups [M].

Florida: Chapman & Hall/CRC, 2001.

[86] Noether E. Invariante variations probleme [J]. Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen,Mathematisch-physikalische Klasse, 1918: 235-257.

[87] Kosmann-Schwarzbach Y. The noether theorems: Invariance and conservation laws in the twentieth century [M]. New York: Springer, 2010.

[88] Olver P J. Conservation laws in elasticity: I. General results [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1984, 85: 119-129.

[89] Olver P J. Conservation laws in elasticity: Ⅱ. Linear homogeneous elastostatics [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1984, 85: 131-160.

[90] Olver P J. Conservation laws in elasticity: Ⅲ. Planar linear anisotropic elastostatics [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1988, 102: 167-181.

[91] Li S F. On dual conservation laws in planar elasticity [J]. International Journal of Engineering Science, 2004, 42: 1215-1239.

[92] 梅风翔. 李群和李代数对约束力学系统的应用 [M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[93] 李继彬. 广义哈密尔顿系统的理论和应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2007.

[94] 武际可, 黄克服. 微分几何及其在力学中的应用 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2011.

[95] Ibragimov N H. A new conservation theorem [J]. J. Math. Anal. Appl., 2007,333: 311-328.

[96] Anderson R L, Ibragimov N H. Lie-Bäcklund transformations in applications [M]. Philadephia: SIAM, 1979.

[97] Stephani H. Differential equations: Their solution using symmetries [M]. New York: Cambridge University Press, 1989.

[98] Flander H. Differential forms [M]. New York: Dover Publications, 1989.

[99] Ames K A, Ames W F. Analysis of the von Kármán equations by group methods [J]. Int. J. Non-Linear Mechanics, 1985, 20(4): 201-209.

[100] Orzag S A. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation [J]. J. Fluid Mech., 1971, 50(4): 659-703.

[101] Nold A, Oberlack M, Cheviakov A F. Applications of symmetry analysis in stability theory [J]. Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisplinary Design, 2010, 112: 257-264.

[102] Buchnev A A. The Lie group admitted by the motion of an ideal incompressible fluid [J]. Dinamika Sploch, Sredi 7, 1971: 212-214.

[103] Lloyd S P. The infinitesimal group of the Navier-Stokes equations [J]. Acta. Mech., 1981, 38: 85-98.

[104] Liu H Z, Li J B, Zhang Q X. Lie symmetry analysis and exaxt explicit solutions for general Burgers equation [J]. Jounal of Compoutational and Applied Mathematics, 2009, 228: 1-9.

[105] Sun B H. Burgers 方程在一般变换群下的精确解 [R/OL]. DOI: 10. 13140/RG. 2. 1.

1043. 5923. (2015-12-1) https://www.researchgate.net/publication/285322511.

[106] Cao Zhijie, Lin Yiping. Lie point symmetries, conservation laws, and solutions of a space dependent reaction diffusion equation [J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 248: 386-398.

[107] 孙博华. 工程科学中的非线性数学问题 [R]. 昆明理工大学理学院讲座, 昆明, 2015.

[108] Sun B H. Noether conservation laws in elasticity [R/OL]. DOI: 10. 13140/RG. 2. 1. 1243. 6560 (2016-1-13) https://www.researchgate.net/publication/290306379.

[109] Cantwell B J. Similarity transformations for the two-dimensional unsteady, stream-function equation [J]. Journal of Fluid Mechanics, 1978, 85: 257-271.

[110] Cantwell B J, Coles D, Dimotakis P. Structure and entrainment in the plane of symmetry of a turbulent spot [J]. Journal of Fluid Mechanics, 1978, 87: 641-672.

[111] 陈曦. 壁湍流的结构系综理论 [D]. 北京: 北京大学, 2012.

[112] She Z S, Chen X, Wu Y, et al. New perspective in statistical modeling of wall-bounded turbulence [J]. Acta Mechanica Sinica, 2010, 26(6): 847-861.

[113] She Z S, Wu Y, Chen X, et al. A multi-state description of roughness effects in turbulent pipe flow [J]. New Journal of Physics, 2012, 14(9): 093054.

结束语

我把量纲分析与 Lie 群写在一本书中, 是希望传播一个学术理念, 就是对于理工科的学生, 一是要学习量纲分析, 二是要掌握 Lie 群分析方法。前者用于建模, 后者用于求解。

量纲分析和 Lie 群都是非常有用的科学研究工具。量纲分析可在不求解问题控制方程的情况下, 从量纲角度找到各参量的普适定量关系。使用量纲分析的关键是对问题相关物理现象的深刻理解和重复参量的正确选择。Lie 群是求解线性和非线性常 (偏) 微分方程的统一方法, 其成功的关键是确定问题的 Lie 群对称性, 即无穷小生成元。简单情况下确定无穷小生成元比较容易, 但一般情况下非常复杂。因此, 如果要使用 Lie 群方法解决实际问题, 就要充分利用可以进行符号运算的商业计算软件。

孙博华，南非开普半岛科技大学教授、校务委员，南非科学院院士（2010）。1989年在兰州大学获理学博士学位，1989—1994年先后在清华大学、荷兰代尔夫特理工大学、德国鲁尔大学（洪堡学者）和南非开普敦大学做博士后研究。2002年12月至2008年1月协助暨南大学校长刘人怀院士创办中国第一家全英文授课国际学院并担任首任院长。2010年入选海外华人十大新闻人物。主要研究领域为应用数学、力学和力学技术。

解决任何科学技术问题都需要建模和求解。美国著名学者B. J. Cantwell倡议：理工科的学生，一要学习量纲分析方法，二要掌握Lie群对称分析。前者用来建立物理模型，后者用来求解。

本书系统地介绍了量纲分析和Lie群。在量纲分析部分，阐述了量纲分析的基本概念和方法，并通过一系列实例展示它的普适性，如破甲弹金属射流的稳定性问题、薄板在高速射流冲击下的撕裂问题、固体的断裂问题、航天器液体推进剂的晃动问题、海面原油泄漏的扩展问题、点源强爆炸问题、沙漠治理中草方格的障沙问题和湍流标度律问题等。在Lie群部分，介绍了Lie群对称的概念、无穷小生成元和Lie代数、泛函的Noether守恒律、微分方程的不变量和相似解的寻求、Lie群的外微分形式、符号运算的软件系统，并通过一些实例展示Lie群对称方法的强大，如传热问题、平板大挠度的von Kármán方程、无黏流体的Euler方程的Lie群对称性分析、一般非线性Burgers方程的精确解、弹性力学的Noether守恒律、二维流体边界层方程的Lie群对称性分析等。

本书适合理工科大学生、研究生和相关领域的研究人员使用。

Advances in Materials and Mechanics (AMM) mainly focuses on the development of modern materials, mechanics, and their interaction in the form of new theories, methodologies, experiments and applications.

ISBN 978-7-04-045517-5

9 787040 455175 >

定价 49.00元

学科类别：力学、数学