诺特定理:
守恒律与对称性的美妙联系

宋伟

清华大学数学系

Invariant variational problems

Invariante Variationsprobleme.

(F. Klein zum fünfzigjährigen Doktorjubiläu

Von

Emmy Noether in Göttingen.

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 26. Juli 1918 [1]).

诺特定理

守恒量 ⟷ 对称性

守恒律是物理学的基本规律

- 能量守恒
- 动量守恒
- 角动量守恒
- 电荷守恒

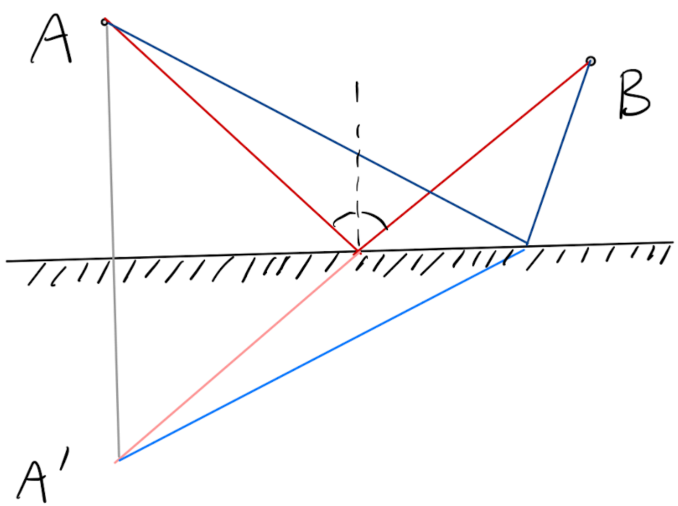
角动量$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$ 守恒

对称性

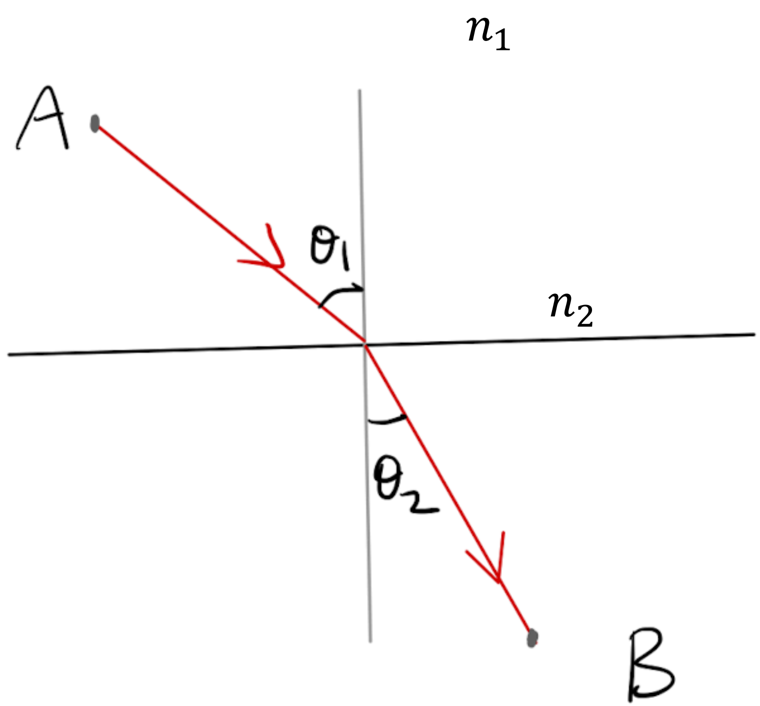
- 时间平移（时间均匀）
- 空间平移（空间均匀）
- 空间转动对称性（空间各向同性）

。。。

费马原理：光程最短

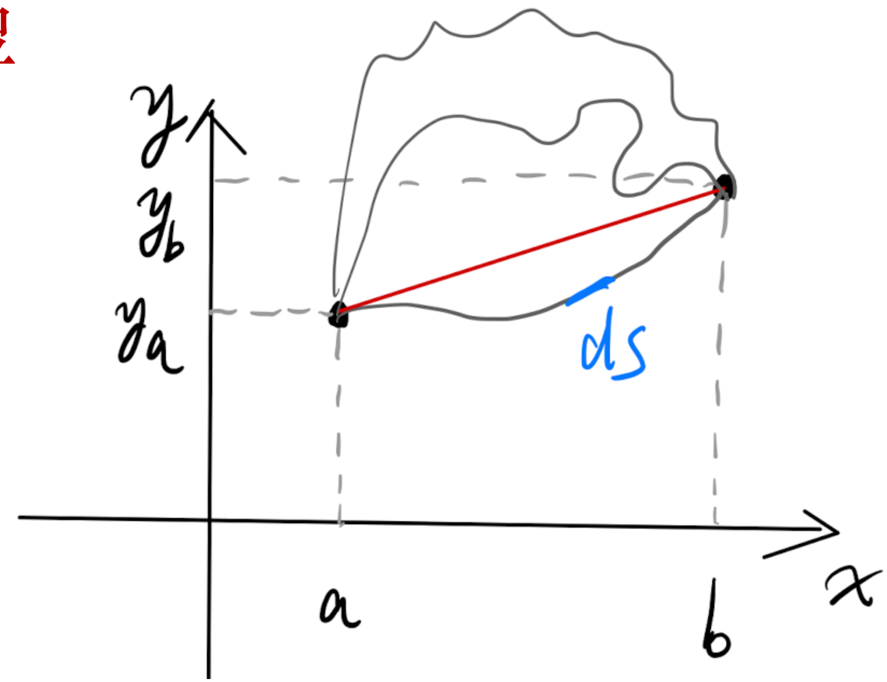


光的反射



光的折射：斯涅尔定律

费马原理：光程最短



均匀介质中：

$$S=\frac{1}{v}\int_a^b ds=\frac{1}{v}\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

最小作用量原理

给定$t = a$和$t = b$ 时刻x^{μ}的取值，系统运动使得

作用量 $S = \int_a^b L(t, x^{\mu}, \dot{x}^{\mu}) dt$ 取最小值。

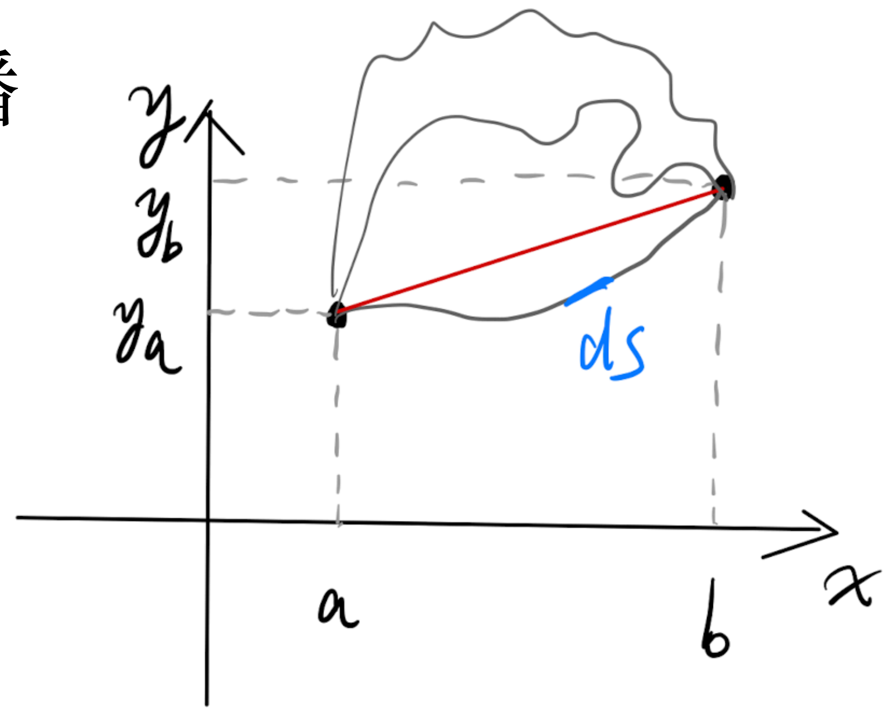
variational problem

作用量取极值的条件 $\Leftrightarrow$ 欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{\partial L}{\partial x^{\mu}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}}$$

例：均匀介质中光的传播

$$S = \frac{1}{v} \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$



欧拉-拉格朗日方程：$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dx}(\frac{\partial L}{\partial y'})$

$$\Longrightarrow 0 = y''$$

例：均匀引力场中 $L=$ 动能 $-$ 势能

$$=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)-mgz$$

欧拉-拉格朗日方程

x 方向：$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\Longrightarrow m\ddot{x}=0$

y 方向：$\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)\Longrightarrow m\ddot{y}=0$

z 方向：$\frac{\partial L}{\partial z}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)\Longrightarrow m\ddot{z}=-mg$

牛顿第二定律

在经典力学中

最小作用量原理 $\Longleftrightarrow$ 牛顿第二定律

最小作用量原理更加普适，自然界的所有已知的物质和基本相互作用都可以用作用量描述。

广义相对论：$S = \frac{1}{16\pi G}\int dx^4 \sqrt{-g}\, R$

定义正则动量 $p_\mu \equiv \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}$.

欧拉-拉格朗日方程 $\dfrac{\partial L}{\partial x^\mu} = \dot{p}_\mu$

$\boxed{\text{空间平移不变性} \Longrightarrow \text{动量守恒}}$

例：均匀引力场中 $L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz$

x 方向： $p_x = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ *平移不变⟹动量守恒*

z 方向： $p_z = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$ ~~平移不变⟹动量守恒~~

定义哈密顿量 $H \equiv H(t, x^\mu, p_\mu) \equiv p_\mu \dot{x}^\mu - L$

则利用欧拉-拉格朗日方程可得：

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\dot{H}$$

$$\boxed{\text{时间平移不变性} \Longrightarrow \text{能量守恒}}$$

例：$L = \text{动能} - \text{势能} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$

$$H = \text{动能} + \text{势能} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz$$

The problems in variation here concerned are such as to admit a continuous group (in Lie's sense);... what is to follow, therefore, represents a combination of the methods of the formal calculus of variations with those of Lie's group theory.

EMMY NOETHER, "Invariante variationsprobleme" (1918)

考虑无穷小变换，

$$t' = t + \varepsilon\tau + \ldots,$$

$$q^{\mu\prime} = q^{\mu} + \varepsilon\zeta^{\mu} + \ldots$$

若 $S = \int_a^b L(t, q^\mu, \dot{q}^\mu)dt$ 在变换下满足

$$S\left[q^{\mu\prime}(t')\right] - S[q^\mu(t)] \sim o(\epsilon)$$

则称作用量在这个变换下是不变的，即对称的。

- 若 ϵ 是一个常数，则称为全局（global）对称性
- 反之，则称为局域（local）对称性

诺特第一定理：作用量的任意一个全局的连续对称性都对应一个守恒量

I. If the integral $\mathscr{I}$ is invariant under a finite continuous group $\mathfrak{G}_\rho$ with ρ parameters, then there are ρ linearly independent combinations among the Lagrangian expressions that become divergences—and conversely, that implies the invariance of $\mathscr{I}$ under a group $\mathfrak{G}_\rho$.

空间平移⇔动量守恒

时间平移⇔能量守恒

转动对称性 ⇔ 角动量守恒

波函数相位平移对称性⇔ 电荷守恒

广义相对论中能量守恒吗？

广义相对论具有广义协变性，这种对称性是这种对称性是局域对称性

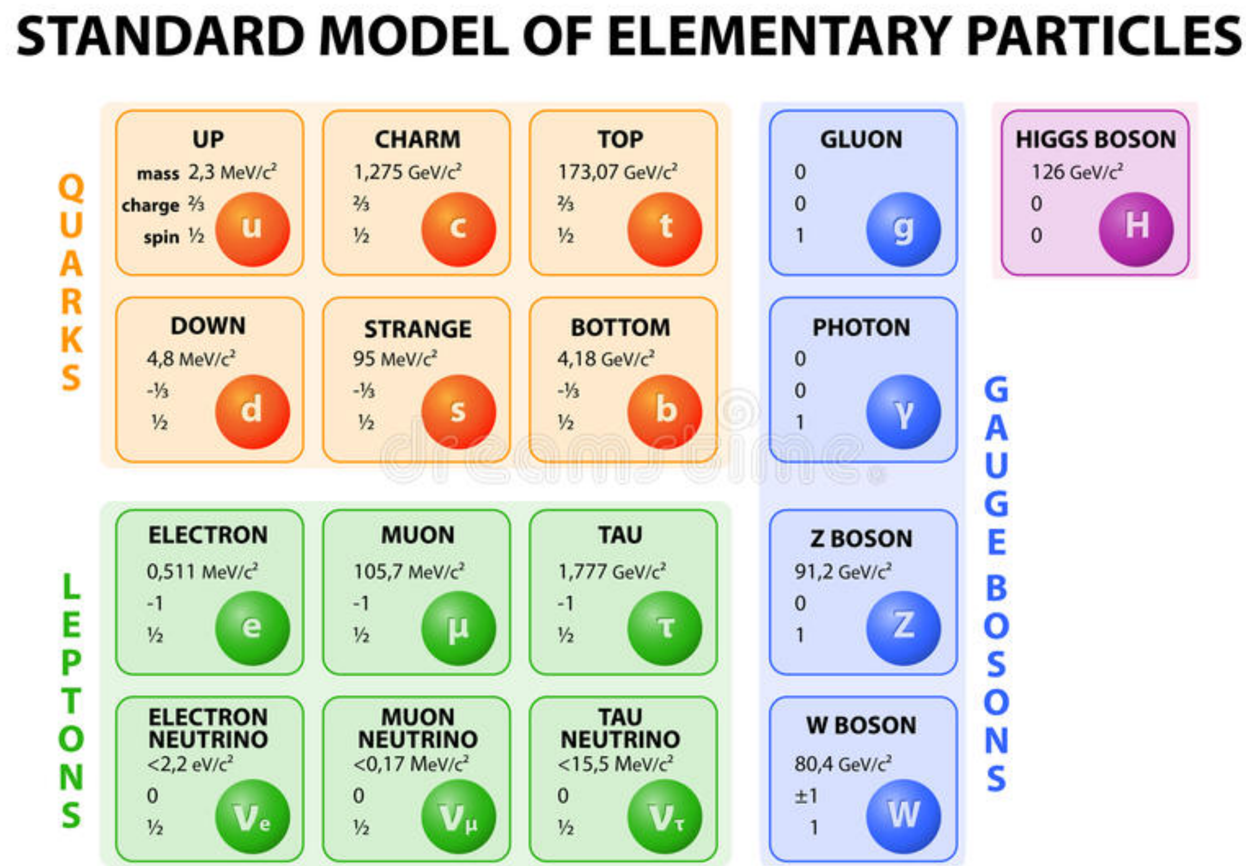
诺特第二定理指出局域对称性不给出守恒量
因而能量守恒在广义相对论中是不同的

渐进平直时空下的总能量守恒

Pure mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas. One seeks the most general ideas of operation which will bring together in simple, logical and unified form the largest possible circle of formal relationships. In this effort toward logical beauty spiritual formulas are discovered necessary for the deeper penetration into the laws of nature.

Albert Einstein, an epitaph of Emmy Noether, published in the New York Times, *May 5, 1935.*

对称性是近代理论物理的指导原则



基本粒子标准模型具有规范对称性

镜像对称性 ⇔ 宇称守恒

李政道、杨振宁提出
弱相互作用下的宇称不守恒

1957年吴健雄等人实验证实

自然界

近代物理
两大支柱

当代物理
一大深刻问题

四大基本相互作用

- 电磁相互作用
- 弱相互作用
- 强相互作用
- 引力相互作用

- 量子力学
- 广义相对论

量子引力理论

（超弦理论？）

检验理论的试金石：黑洞，早期宇宙