

表示，随处可见

席南华

中国科学院数学与系统科学研究院

July 5, 2010

什么是表示论

所有的数学就是某类表示论。

I. M. Gelfand

All of Mathematics is
some kind of representation theory.

术语的解读

中文：表示

日语：表现

英语：Representation

结论：表示就是把一个对象的某种性质或结构再现于另一个对象上。

术语在数学中的准确含义

表示: 把一个对象的代数结构**再**
现于一个由线性变换（或矩阵）
构成的具体对象上。

表示论关注的代数结构主要有：
群、代数、李代数。

表示是一类同态

代数结构由运算确定。

两个数学对象一般通过映射建立联系。

保持运算的映射反映了结构之间的联系，称为**同态**。

表示就是同态，其目标对象由线性变换组成。

表示论大致分成三部分

群的表示论、代数的表示论、李代数的表示论。

群表示:

群 $\xrightarrow{\text{群同态}}$ {线性空间的可逆线性变换}

代数表示:

代数 $\xrightarrow{\text{代数同态}}$ {线性空间的线性变换}

表示论大致分成三部分-续

李代数表示:

李代数 $\xrightarrow[\text{同态}]{\text{李代数}}$ {线性空间的线性变换}

有限维表示: 即线性空间的维数有限。

有限维表示的另一形式

群表示:

群 $\xrightarrow{\text{群同态}}$ {某个域上的 n 阶可逆方阵}

代数表示:

代数 $\xrightarrow{\text{代数同态}}$ {某个域上的 n 阶方阵}

李代数表示:

李代数 $\xrightarrow[\text{同态}]{\text{李代数}}$ {某个域上的 n 阶方阵}

群的一维表示I

群 $\xrightarrow{\text{群同态}}$ {某个域的非零元}

也称为群的**特征**。

例：

- $GL_n(F) \rightarrow F^*$, $A \rightarrow \det A$.

F : 域, $F^* = F - \{0\}$,

$GL_n(F) = \{F \text{ 上的 } n \text{ 阶可逆方阵}\}$

群的一维表示II-例

- 二次互反律中的Legendre符号 $\left(\frac{x}{p}\right)$ 是阶为 $(p-1)$ 的循环群的一个特征。
- 数论中的高斯和：

$$G(\chi, \sigma) = \sum \chi(t)\sigma(t), \quad t \in \mathbb{F}_p^*$$

χ 和 σ 分别是加法群 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$ 和乘法群 \mathbb{F}_p^* 的特征。

群的一维表示III-例

- 实数上的周期函数本质上是单位圆周 $S = \{e^{ix} \mid x \in \mathbb{R}\}$ 上的函数。

S 上的平方可积函数全体 H 是希尔伯特空间. S 的特征全体是 e^{inx} , $n \in \mathbb{Z}$. 它们构成 H 的标准正交基。

模的语言

表示的三部分:

- 代数结构 A
- 同态
- {线性空间 V 上的一些线性变换}

定义:

V 称为 A 模, 也称为 A 的表示。

本质:

A 的元素线性地作用在 V 上。

例-高维情形I

- V 是 $GL(V)$ (V 的可逆线性变换全体) 的模。
- 多项式环 $F[x_1, \dots, x_n]$ 是 $GL_n(F)$ 的模。
- 多项式环 $F[x_{11}, x_{12}, \dots, x_{n,n-1}, x_{nn}]$ 是 $GL_n(F)$ 的模。

例-高维情形II

- 李群在单位元处的切空间是该李群的表示，称为李群的**伴随表示**。
- 上同调群 $H^i(X, \mathcal{L})$ 是 $GL_n(\mathbb{C})$ 模。

X : **旗流形**

其元素是 \mathbb{C}^n 的子空间滤过

$$V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{C}^n, \dim V_i = i$$

\mathcal{L} : X 上的**全纯线丛**。

例-高维情形III

- $L^2(\mathbb{C})$ 是 $SL_2(\mathbb{C})$ (行列式为1的 2×2 复矩阵全体) 的表示。
- $L^2(G/\Gamma)$ 是 G 的表示,
 G : 李群
 Γ : 离散子群且 $\text{Vol}(G/\Gamma)$ 有限。

特征标的 Selberg 迹公式。

例-高维情形IV

- 单电子的轨道波函数生成正交群 $SO(3)$ 的表示。
- 单电子的自旋波函数生成酉群 $SU(2)$ 的表示。
- Gell-Mann用 $SU(3)$ 的十维表示预言了 Ω^- 粒子的存在，被实验证实。

例-箭图的表示

箭图 Γ :

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ \\ 1 & & 2 & & 3 & & & & n-1 & & n \end{array}$$

Γ 的表示:

$$\{V_i, f_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-1\}$$

V_i : 域 F 上的线性空间,

$f_j: V_j \rightarrow V_{j+1}$ 线性变换

就是路径代数 $F[\Gamma]$ 的表示。

表示的基本思想:

对称和线性化

- 代数结构反映了对称性。
- 代数结构的表示给出了代数结构的线性化，也反映了相关线性空间的某种对称性。

表示论的基本问题：

- 什么样的表示是最基本的，
- 一般的表示如何从最基本的表示构建，
- 如何构造最基本的表示，
- 最基本的表示的性质，如分类、维数、特征标等，
- 一些自然得到的表示的性质，等等。

子表示:

A : 代数结构 (如群、李代数等)

V : A 的表示

V 的子表示: V 的 A 不变子空间。

例:

$V = \mathbb{C}^n$ 自然是对称群 S_n 的表示。

$\{(a, a, \dots, a) \mid a \in \mathbb{C}\}$ 是 V 的子表

示。

不可约 (单) 表示:

零子空间和自身外, 无其它子表示。

最基本的表示:

不可约 (单) 表示

例: ● 一维表示

- V 是 $GL(V)$ 的不可约表示
- V 是 $gl(V)$ (V 的线性变换全体) 的不可约表示

不可约表示-续:

- 次数为 i 的 n 元齐次复多项式全体是 $GL_n(\mathbb{C})$ 的不可约表示
- $sl_n(\mathbb{C})$ 是 $GL_n(\mathbb{C})$ 的不可约表示
- $gl_n(\mathbb{C})$ ($n \times n$ 复矩阵全体) 不是 $GL_n(\mathbb{C})$ 的不可约表示
- $V \otimes V$ 不是 $gl(V)$ 的不可约表示
- $L^2(\mathbb{C})$ 是 $SL_2(\mathbb{C})$ 的不可约表示

同态与同构

表示的同态（模同态）：

保持作用的线性映射。

U, V : A 的表示（模）

$\phi: U \rightarrow V$ 线性映射

$$\phi(au) = a\phi(u), \quad a \in A$$

表示的同构（模同构）：

保持作用的可逆线性映射。

Schur引理

Schur引理:

不可约表示之间的非零同态是同构。

不可约模的分类I

有限群:

定理: 如果表示空间是复线性空间, 则

- (1) 不可约表示的个数等于有限群的共轭类的个数;
- (2) 每一个表示都是不可约表示的直和;
- (3) 不可约表示的维数的平方和等于该有限群的阶。

例一 对称群

- 对称群 S_n 的复不可约表示的个数是 n 的划分数 $P(n)$ 。
- 不可约表示的维数可以计算。
- 如果表示空间的基域 F 的特征 $p \leq n$ ，不可约表示的分类已知。
- 但其它的性质所知甚少，如维数等。这是一个重要的问题。

不可约表示的分类II

单位圆周 S :

定理:

$$\begin{aligned} \{S \text{ 的不可约酉表示}\} &\longleftrightarrow \mathbb{Z}, \\ e^{inx} &\longleftrightarrow n. \end{aligned}$$

$$\{\mathbb{Z} \text{ 的不可约酉表示}\} \longleftrightarrow S.$$

庞德列亚金对偶

(Pontryagin duality)

不可约表示的分类III

定理(Peter-Weyl): 对紧李群 G :

- (1) 有限维酉表示的矩阵系数张成的子空间在 $L^2(G)$ 中稠密。
- (2) 每个复不可约表示都是酉表示, 且维数有限。
- (3) 每个酉表示都是完全可约的。
- (4) 每个不可约酉表示在 $L^2(G)$ 中出现的重数等于该表示的维数。

定理(Weyl): 特征标公式。

不可约表示的分类IV

一般线性群:

定理:

$\{GL_n(\mathbb{C})\text{的有限维不可约表示}\}$

$\updownarrow 1-1$

$\{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \mid a_i \geq a_{i+1}\}$

不可约表示的特征标 (包括维数) 由Weyl的公式给出。

不可约表示的分类V

一般线性李代数:

定理:

$\{gl_n(\mathbb{C})$ 的有限维不可约表示 $\}$

$$\updownarrow 1-1$$

$\{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \mid a_i \geq a_{i+1}\}$

不可约表示的特征标 (包括维数) 由Weyl的公式给出。

不可约表示的分类VI

矩阵代数:

V : 域 F 上的 n 维向量空间。

- $\text{End}(V)$ (V 上的线性变换全体)的不可约表示只有 V 本身。
- $M_n(F)$ (F 上的 $n \times n$ 全体)的不可约表示只有 F^n 。

不可约表示的分类VII

再看一般线性群:

定理: $\bar{\mathbb{F}}_p$: $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 的代数闭包。

$\{GL_n(\bar{\mathbb{F}}_p)$ 的有限维不可约表示

$$\updownarrow 1 - 1$$

$$\{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \mid a_i \geq a_{i+1}\}$$

不可约表示的特征标 (包括维数) 不清楚。与Schubert簇的奇点有关。

不可约表示的分类VIII

再看一般线性李代数:

定理: $gl_n(\bar{\mathbb{F}}_p)$ 的不可约表示都是有限维的。

分类复杂, 与Springer纤维关系密切。

维数一般情况不清楚, 极其复杂。

不可约表示的分类IX

箭图 Γ :

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ \\ 1 & & 2 & & 3 & & & & n-1 & & n \end{array}$$

- Γ 的不可约表示 ($1 \leq i \leq n$):

$$E_i = (0, \dots, 0, \underset{i\text{-th}}{F}, 0, \dots, 0)$$

- $\{\Gamma\text{的不可分解表示}\}$

$$\updownarrow 1-1$$

$$\{GL_{n+1}(\mathbb{C})\text{的正根}\}$$

不可约表示的分类X-无限维表示

定理： $SL_2(\mathbb{C})$ 的不可约酉表示分类如下：

(a) 平凡表示

(b) 酉主列 ($k \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R}$)

$$\mathcal{P}^{k, iy}$$

(c) 补充列 C^x , 此处 $0 < x < 2$.

其中仅有的同构关系是

$$\mathcal{P}^{k, iy} \cong \mathcal{P}^{-k, -iy}$$

研究方法

代数

分析

微分几何

代数几何

拓扑

代数方法I

有限群的表示理论

李（超）代数和李群的表示理论

代数群的表示理论

量子群的表示理论

代数的表示理论

代数方法II

有限群的表示理论

G : 有限群; H : 子群; F : 域

$F[G]$: 群代数

研究群代数的性质、诱导表示

$$\text{Ind}_H^G V = F[G] \otimes_{F[H]} V$$

M : G 的表示, $\chi_M : G \rightarrow F$

$g \rightarrow$ 线性变换的迹

代数方法III

李（超）代数和李群的表示理论

G : 李群; \mathfrak{g} : 李代数; \mathfrak{h} : 子李代数;

研究普遍包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 和诱导表示

$$\text{Ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}} V = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{h})} V$$

特征标理论

代数方法IV

代数群和量子群的表示理论

G : 代数闭域 k 上的代数群

$k[G]$: 坐标代数

考虑 $k[G]$ 的余模和 $k[G]$ 的超代数的表示

量子群的表示

与李代数和代数群的表示理论部分平行

分析方法I

拓扑群、李群的表示理论

G : 局部紧群

X : 局部紧Hausdorff空间, G 连续作用在其上, 且有 G 不变的正测度

问题: 如何分解 $L^2(X)$ 到不可约表示

分析方法II

p -adic域上的代数群的表示理论

G : p 进群, 如 $GL_n(\mathbb{Q}_p)$

F : 域, 如复数域

考虑

$C^\infty(G, F) = \{\text{局部常值 } G \rightarrow F\}$

光滑表示

微分几何方法

李群的表示

G : 李群, H : 闭子群

齐性空间 G/H 上的几何

代数几何方法I

代数群的表示理论

有限群的表示理论

李代数的表示理论

代数几何方法II

F : 代数闭域, 如 \mathbb{C} , $\bar{\mathbb{F}}_p$

G : F 上的代数群, 如

$GL_n(F)$, $SL_n(F)$, $Sp_{2n}(F)$, $SO_n(F)$, ...

研究: $H^i(X, \mathcal{L})$

其中 X 是有 G 作用的代数簇

\mathcal{L} 是 X 上的 G 等变向量丛。

一个问题: 何时 $H^i(X, \mathcal{L}) \neq 0$

代数几何方法II

\mathbb{F}_q : q 元有限域

有限群李型群:

$GL_n(\mathbb{F}_q)$, $SL_n(\mathbb{F}_q)$, $Sp_{2n}(\mathbb{F}_q)$, $SO_n(\mathbb{F}_q)$, ...

有限李型群是代数群的特殊子群:
Frobenius映射的不动点。

利用 l -进制上调构造群的表示:
Deligne-Lusztig理论

代数几何方法III

复半单李代数的表示理论

Kazhdan-Lusztig猜想 (1979)

$$\text{ch}L_w = \sum_{y \leq w} (-1)^{l(w) - l(y)} P_{y,w}(1) \text{ch}M_y$$

猜想被Beilinson-Bernstein 和
Brylinski- Kashiwara 证明, 1981.
旗流形上的 D 模理论和反常层理论

拓扑方法I

工具：纤维丛、示性类、上同调、 K 理论等

拓扑方法II—例

X : 旗流形, $G = GL_n(\mathbb{C})$

\mathcal{N} : \mathbb{C}^n 上的幂零线性变换全体

$$Z = \{(\xi, x_1, x_2) \mid \xi x_i = x_i\} \subset \mathcal{N} \times X \times X$$

$K^{G \times \mathbb{C}^*}(Z)$ 同构于仿射Hecke代数,

在证明Deligne-Langlands关于仿射Hecke代数的猜想中起决定性的作用。

历史I

数论中的特征

有限交换群的表示

有限群的表示

李群和李代数的有限维表示

李群和李代数的无限维表示

历史II-数论中的特征

Gauss: 高斯和

《Disquisitiones Arithmeticae》

(《数论研究》, 1801)

Dirichlet: L 函数(1837)

$$L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^{-s}}.$$

历史II-有限交换群的表示

Dedekind: 定义某些有限交换群的特征 (1878)

Webber: 定义有限交换群的特征 (1881)

《Lehrbuch der Algebra》 (1896)

历史III-有限群的表示1

起点:

Dedekind: 有限交换群的群行列式的分解(1880年左右开始考虑)

$G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, x_{g_i} : 不定元
行列式 $|x_{g_i g_j^{-1}}|$ 称为 G 的群行列式

给 Frobenius 的信 (1896)

历史III-有限群的表示2

奠基人: Frobenius

特征标理论, 不可约特征标的正交关系 (1896)

表示的定义, 表示的特征标 (1897)

诱导表示, Frobenius互反律 (1898)

特征标的计算: $PSL_2(p)$ (1896), S_n (1900), A_n (1901)

历史III-有限群的表示3

Burnside:

有限群表示理论的应用。

1904: $|G| = p^a q^b \implies G$ 可解

猜想: 奇数阶有限群可解
(1911)

历史III-有限群的表示4

Schur:

Schur引理 (1905) , 特征标理论的新视角

引进射影表示 (1907)

$$G \rightarrow GL_n(\mathbb{C}) / \{\text{纯量矩阵}\}$$

表示的算术性质, Schur指标 (1906)

历史III-有限群的表示5

Noether: 现代理论的开始

1929

引进群代数 $F[G]$

采用模的语言

历史III-有限群的表示6

Brauer: 模表示理论

$k[G]$ 的模理论, $\text{char } k \nmid |G|$

不可约模的分类 (1935)

模表示理论与常表示理论的联系

分解矩阵和Cartan矩阵的关系 (1937): $C = D'D$

p -块理论和亏群的引进

历史IV-李群和李代数的有限维表示1

$SL_2(\mathbb{C})$ 和 $sl_2(\mathbb{C})$

S. Lie: 确定不可约表示 (1893)

E. Cartan (1894),

G. Fano (1896):

表示的完全可约性

历史IV-李群和李代数的有限维表示2

A. Hurwitz: 酉技巧 (1897)

群 $G = SL_2(\mathbb{C})$, $G_u = SU(2) = S^3$,

表示 $\sigma : G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$

多项式 $P : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$

则 $(x \in \mathbb{C}^n)$

$$\hat{P}(x) = \frac{1}{8\pi} \int_{G_u} P(g^{-1} \cdot x) dv \in \mathbb{C}[\mathbb{C}^n]^G$$

历史IV-李群和李代数的有限维表示3

群 $G = SL_2(\mathbb{C})$, $G_u = SU(2) = S^3$,

表示 $\sigma : G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$

$H(\cdot, \cdot) : \mathbb{C}^n$ 上的正定非退化厄密形

则 $(x, y \in \mathbb{C}^n)$

$$\hat{H}(x, y) = \int_{G_u} H(g^{-1} \cdot x, g^{-1} \cdot y) dv$$

G_u 不变, 正定非退化。

从而 G 的有限维表示完全可约

历史IV-李群和李代数的有限维表示4

A. Hurwitz: 酉技巧 (1897)

$SL_n(\mathbb{C})$ 和 $SO_n(\mathbb{C})$ 表示的完全可约性。

Casimir: 引进Casimir算子证明 $sl_2(\mathbb{C})$ 表示的完全可约性

引进一般情形的Casimir算子
(1931)

历史IV-李群和李代数的有限维表示5

E. Cartan: 构造了复单李代数的所有不可约表示 (1913)

Schur: SU_n 和 SO_n 的特征标, 完全可约性 (1922, 用Hurwitz 1897的方法)

历史IV-李群和李代数的有限维表示6

H. Weyl:

对复半单李群、复半单李代数、紧李群证明了完全可约性，给出了表示的特征标（1926）

李群整体理论的开始。

对E. Cartan的影响

历史IV-李群和李代数的有限维表示7

Peter-Weyl (1927) : 紧拓扑群上的调和分析奠基之作，也是群上调和分析的开端。

Peter-Weyl定理。

Weyl (1928): 《Gruppentheorie und Quantenmechanik》

历史IV-李群和李代数的有限维表示8

Pontryajin (1934), van Kampen (1935):

局部紧的交换拓扑群的

Pontryajin对偶

van der Waerden (1935) :

复半单李代数的有限维表示的完全可约性的代数证明

Brauer (1936) :

另一个代数证明

历史IV-李群和李代数的无限维表示

E. Wigner: Poincaré群的不可约
(射影) 酉表示 (1939)

V. Bargmann: Lorentz群的不可
约酉表示 (1947)

I.M. Gelfand和M.A. Naimark:
 $SL_2(\mathbb{C})$ 的不可约酉表示的分类
(1947)

1950以后

I.M. Gelfand, Harish-Chandra,
Selberg, A. Weil, Grothendieck,
Borel, Langlands, Deligne,
Kazhdan, Drinfeld, Lafforgue,
Bernstein, Beilinson, V. Kac,
Lusztig, ...